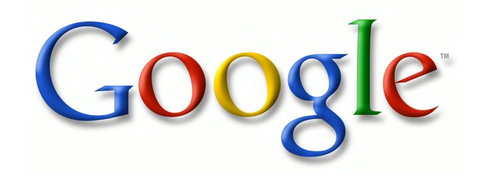
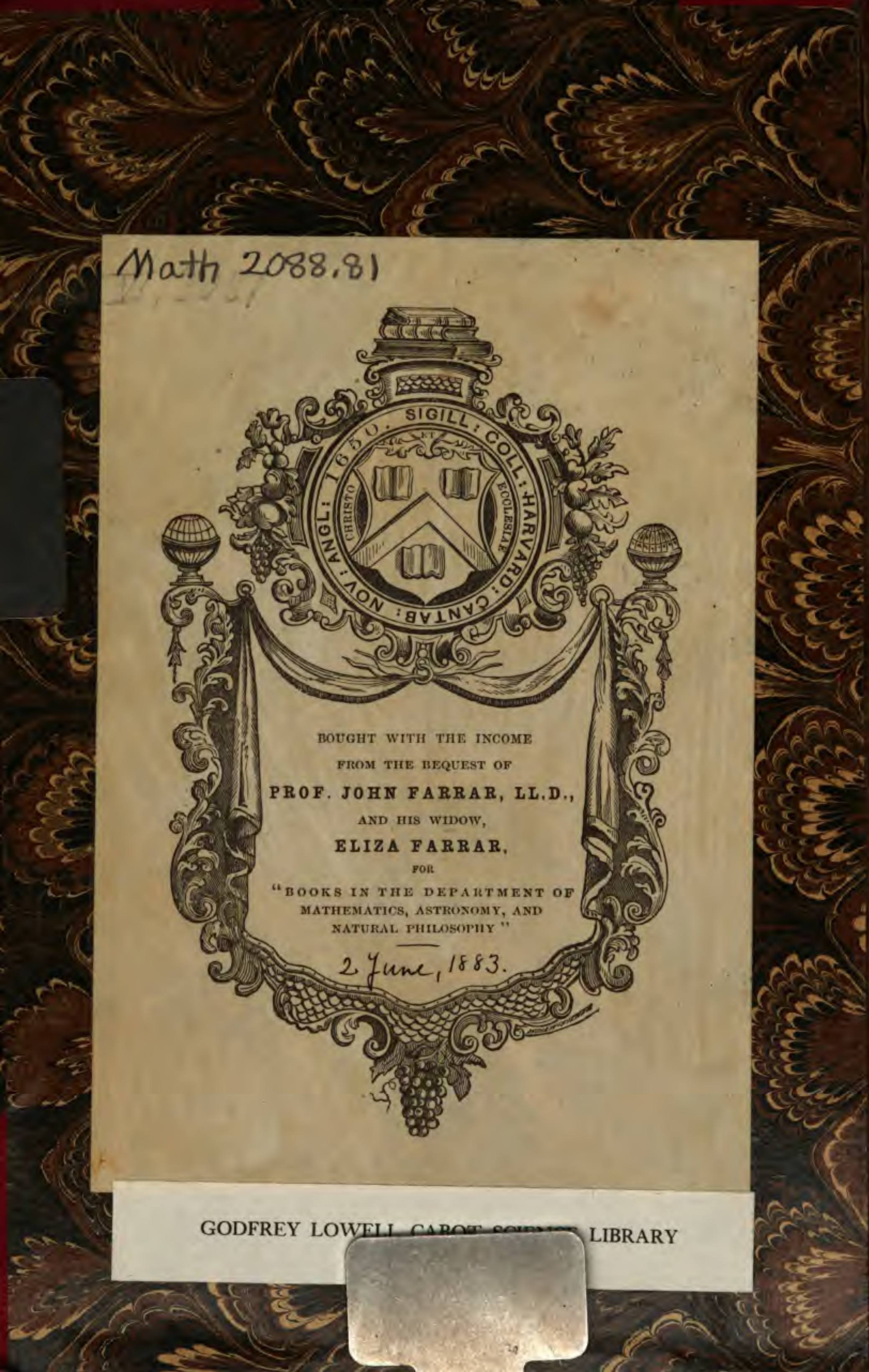
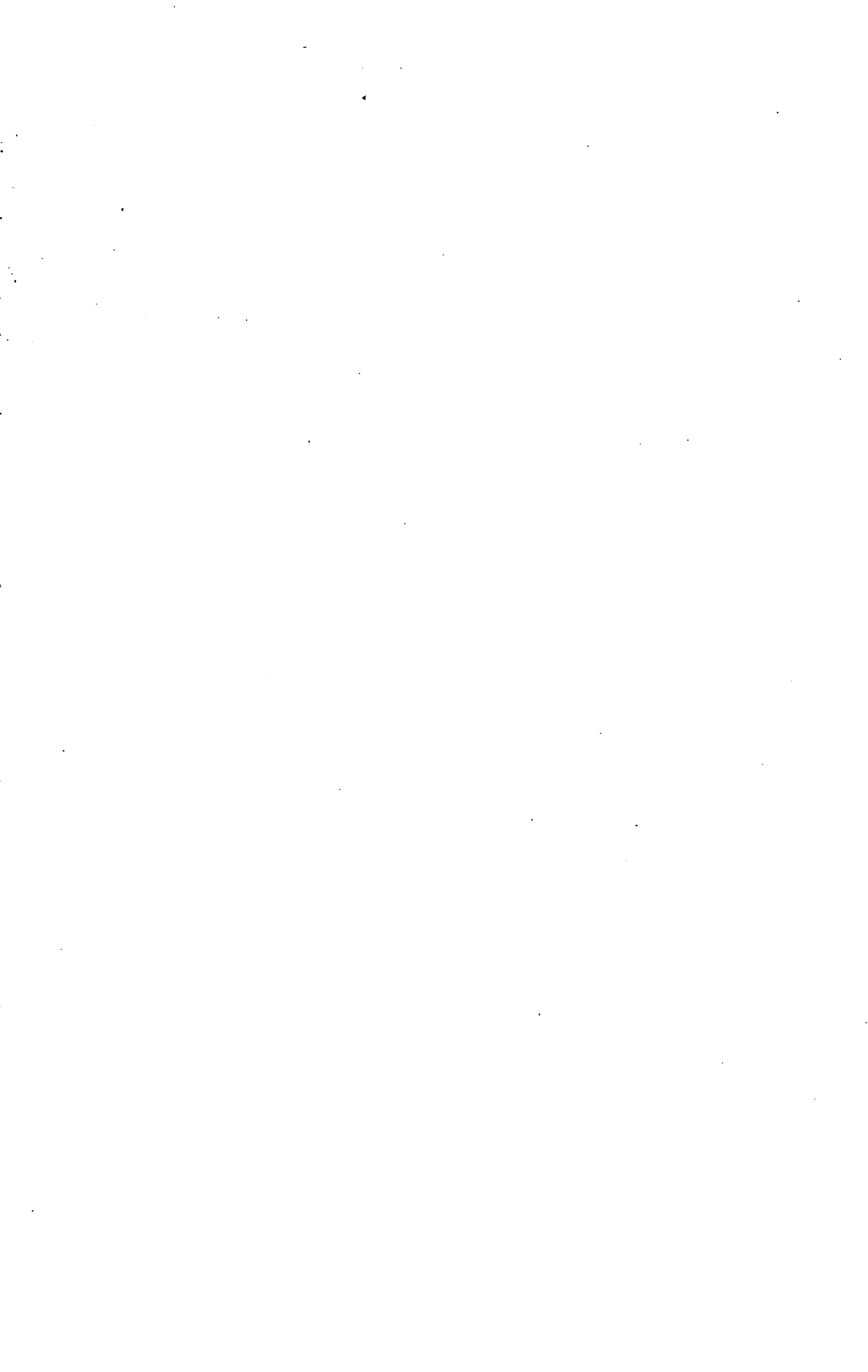



SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE







LEHRBUCH

ZUR EINFÜHRUNG IN

DIE MODERNE ALGEBRA.

MIT EINIGEN HUNDERT BEISPIELEN

VON

DIEDR. AUG. KLEMPT,

REALSCHULLEHRER IN ROSTOCK.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1880.

Vorrede.

Während die ältere Algebra sich vorzugsweise mit der Aufgabe beschäftigt, diejenigen Werthe einer Funktion zu finden, für welche dieselbe verschwindet, sucht die neuere Algebra Eigenschaften der Funktionen zu entdecken und betrachtet die Kenntniss der Zahlwerthe der Wurzeln als etwas Nebensächliches. Daher wurden von den Meistern der modernen Algebra Methoden und Denkoperationen erdacht, welche sich wesentlich von denen der älteren unterscheiden, durch welche sie ihre wahrhaft schönen Entdeckungen machten und auf viele Zweige der Mathematik ihr Licht warfen, so dass dieselben ein neues elegantes Gewand bekamen und mit Riesenschritten vorwärts eilten. Im Laufe weniger Jahrzehnte eroberten unsere ersten Forscher ein sehr ausgedehntes Reich für die Algebra und ihre Bedeutung ist in stetem Wachsthum begriffen. Deshalb ist es für den Studirenden der Mathematik nothwendig geworden, sich möglichst bald mit den wichtigsten Principien derselben vertraut zu machen, ja es ist sogar wünschenswerth, dass den Studirenden bereits in dem ersten Semester Gelegenheit geboten werde, die Hauptsätze und die vorzüglichsten Denkoperationen der modernen Algebra kennen zu lernen, um dann mit besserem Verständniss an die übrigen Disciplinen zu gehen.

Nun sind freilich die Lehren der neueren Algebra theils in den Vorlesungen von Salmon, theils in den Elementen der neueren Geometrie von Fiedler, theils in der Theorie der binären Formen von Clebsch, theils in der Théorie des formes binaires von Bruno in eleganter und meisterhafter Weise entwickelt; aber es steht wohl erfahrungsmässig fest, dass diese Lehrbücher nicht geeignet sind, den Anfänger, der eben die Schule verlassen hat, einzuführen, weil sie

Kenntnisse voraussetzen, die diese nicht besitzen, weil sie sich in Denkoperationen bewegen, worin diese nicht geübt sind.

Die vorliegende Arbeit beabsichtigt nun, diesem Mangel abzuhelfen. Sie ist so gehalten, dass sie von jedem begabteren Primaner, um so mehr von jedem Studenten verstanden werden kann, indem dieselbe aus der Algebra nur die Gleichungen ersten und zweiten Grades mit einer Unbekannten, aus der Trigonometrie die goniometrischen Grundformeln als bekannt voraussetzt, und so viel Uebung im Rechnen mit Buchstabengrössen verlangt, als man wohl allgemein findet. Mit dieser Grundlage soll der Leser in die schönen Untersuchungen der genialen Schöpfer eingeführt werden. Dem entsprechend haben wir die vorliegende Schrift nicht als Handbuch, nicht als Grundzüge, sondern als ein Lehrbuch zur Einführung in die moderne Algebra bezeichnet, und hatten stets zwei Punkte im Auge: erstens den Leser mit den Hauptproblemen theils bekannt zu machen, theils ihn an dieselben heran zu führen, und zweitens, ihm hinlängliche Uebung in den ihm fremden Denkformen zu bieten. Aus dem letzten Grunde gaben wir für viele Sätze mehrere Beweise und fügten mehrere hundert Aufgaben hinzu. Der Nutzen, den diese Aufgaben gewähren, ist jetzt so allgemein anerkannt, dass ich ihnen das Wort nicht zu reden brauche. Nur will ich bemerken, dass ich manches unter diese verweisen konnte, was sonst im System hätte behandelt werden müssen.

Was nun die specielle Durchführung betrifft, so hätte es zunächst als überflüssig erscheinen können, die Combinatorik mit zu geben, da sich diese in allen Schulbüchern findet. Aber man bemerkt leicht, dass diese Lehre in den verbreitetsten Schulbüchern [z. B. von Kambly, Koppe] nicht so eingehend erörtert ist, wie es hier geschah, und deshalb geschah, weil das combinatorische Denken eines der logischen Momente ist, deren sich die neuere Algebra mit so grossem Vortheil bedient, und die Unsicherheit in dieser Geistesthätigkeit zuerst beseitigt werden musste. Uebrigens dürften manche der mitgetheilten Beweismethoden dem Leserkreise, den ich im Auge habe, unbekannt sein.

An die Combinatorik schliesst sich naturgemäss die Theorie der Determinanten, dieses mächtigen mathematischen

Hebels, an. Die Elemente dieser Lehre sind zwar wiederholt elementar behandelt, aber diese Darstellungen gehen nur bis zum Multiplikationstheoreme. Ich habe nun den Versuch gemacht, die elementare Behandlungsweise weiter durchzuführen, z. B. die Lehre von den Minoren, die Entwickelung nach Elementen der Diagonale, nach Elementen verschiedener Zeilen und Reihen, die Lehre von den symmetrischen und schief symmetrischen Determinanten u. s. f. zu geben.

Hierauf folgt eine erschöpfende Behandlung der linearen Gleichungen und Funktionen. Diese Lehren wurden mit einer solchen Vollständigkeit gegeben, weil man durch sie am leichtesten in eine Reihe von Methoden eingeführt wird, deren nähere Bekanntschaft durchaus nothwendig ist und weil die Resultate für die Fortentwickelung von grosser Bedeutung sind.

Die Theorie der homogenen Funktionen zweiten Grades kann wohl noch nicht als wissenschaftlich abgeschlossen betrachtet werden. Gleichwohl diesem Gegenstande 12 § zu widmen, bestimmten mich mehrere Gründe: Diese Funktionen bilden die beste Vorbereitung für die Lehre von den linearen Transformationen und den kanonischen Formen, so dass es methodisch unrichtig gewesen wäre, sie nicht zu geben. Ferner gehören die Entdeckungen auf diesem Gebiete zu den elegantesten und geistreichsten der letzten Decennien und nehmen daher leicht das volle Interesse eines Jeden in Anspruch. Endlich sind diese Untersuchungen von solcher Wichtigkeit, dass eine möglichst frühe Bekanntschaft mit denselben sehr wesentlich ist. Ich glaube nun die Theorie dieser Funktionen unter Voraussetzung der Kenntniss der vorangehenden Abschnitte dieser Schrift so weit entwickelt zu haben, dass Jeder mit Erfolg die Originalabhandlungen — und sie verdienen es — studiren kann, der sich ausserdem die Elemente der Differentialrechnung angeeignet hat.

In den letzten Abschnitten behandelte ich folgende Kapitel: Die Rechnung mit complexen Zahlen, Stetigkeit algebraischer Funktionen, Existenz einer Wurzel, Anzahl der Wurzeln, Symmetrische Funktionen der Wurzeln, Elimination und Resultante, Discriminante und kanonische Formen, womit ich dasjenige gegeben zu haben glaube, was für ein erfolgreiches Studium nothwendig ist. Alles dasjenige, was dazu dient, die Zahlenwerthe der Wurzeln festzustellen, habe

ich sorgfältig vermieden, da es hinlänglich viele Lehrbücher gibt, die in diese Lehren mit genügender Vollständigkeit einführen.

Die Aufgaben habe ich so gewählt, dass alle behandelten Lehren dadurch sicheres und gut verstandenes Eigenthum des Studirenden werden, dass er angeregt wird, selbständig Theorien zu entwickeln, ohne jedoch das Maass seiner Kräfte zu überschreiten, dass er endlich auch in den meisten Aufgaben einen für die übrigen Disciplinen werthvollen Inhalt findet. So, hoffe ich, wird der Leser an den Beispielen mehr Genuss finden, als ein blosses Uebungsmaterial gewähren kann; und es wird die durch sie bewirkte Förderung bei einem gleichen Zeitaufwand erheblicher sein, als dies sonst bei der Durchrechnung von Aufgabensammlungen der Fall ist.

So möge denn das Büchelchen seinen Zweck erreichen; es möge dem jungen Mathematiker ein Führer und zwar ein sicherer und angenehmer sein.

Inhalts-Verzeichniss.

Zweiter Abschnitt.

Determinanten. § 40—81.

Dritter Abschnitt.

Lineare Gleichungen und Funktionen. § 82—99.

Vierter Abschnitt.

Homogene lineare Funktionen zweiten Grades. § 100—111.

Fünfter Abschnitt.

Allgemeine Sätze über ganze algebraische Funktionen *n*ten Grades mit einer Veränderlichen. § 112—128.

Sechster Abschnitt.

Symmetrische Funktionen der Wurzeln. § 129—137.

Siebenter Abschnitt.

Elimination. § 138—141.

Achter Abschnitt.

Die Discriminante. § 142—145.

Neunter Abschnitt.

Kanonische Formen. § 146—149.

Verbesserungen.

Seite 5 Zeile 10 von oben lies: als 4 Elemente gestatten.
„ 7 „ 10 „ unten „ 1 Gr. *abc* 2 Gr. *bac*.
„ 31 „ 13 „ „ „ $\overset{w}{C}{}^{(m)}_{(n)} = C^{(m)}_{(n+m-1)}$.
„ 32 „ 15 „ „ „ zur $(m \div 1)$ten Classe.
„ 45 „ 2 „ „ „ jede zweimal.
„ 55 „ 9 „ „ „ a_{14}.
„ 57 „ 5 „ „ „ a_{2k} bis a_{nk}.
„ 57 „ 3 „ „ „ a_{2k} α_{2k}.
„ 79 „ 10 „ „ „ $\alpha_{11}, \alpha_{21} \dots \alpha_{p+1,1}$.
„ 79 „ 6 „ „ „ $(-1)^p a_{p+1,1}$.
„ 79 „ 3 „ „ „ $a_{p+1,1}$ für $a_{p+1,2}$.
„ 97 „ 5 „ oben „ $a_{k-1,\lambda-1}$.
„ 97 „ 6 „ „ „ $a_{k-1,\lambda+1}$.
„ 97 „ 8 „ „ „ $a_{i-1,\mu+1}$.
„ 110 „ 14 „ „ „ $\sum_1^4 A_\mu A_\nu D_{\mu\nu}$.
„ 110 „ 2 „ unten „ $\sum_1^4 A_\mu A_\nu D_{\mu\nu} + \sum_1^4 A_\mu A_\nu A_o D_{\mu\nu o}$.

Erster Abschnitt.

Combinatorik.

§ 1.

Einleitung.

Während die Grössen in vielen Zweigen der Mathematik nur in Bezug auf ihre Quantität oder ihre Benennung, überhaupt in Bezug auf irgend eine Eigenschaft betrachtet werden, sieht die Combinationslehre hiervon ab und berücksichtigt blos die Art der Nebeneinanderstellung, die Anordnung der gegebenen Dinge oder Zahlen.

Die Dinge, Personen, Zahlen u. s. w., die geordnet werden sollen, heissen Elemente, die Zusammenstellung selbst nennt man eine Complexion. Die Elemente werden durch Buchstaben a, b, c u. s. w. oder durch Zahlen 1, 2, 3, 4 ... oder durch Buchstaben mit Indices $a_1, a_2, a_3 \ldots, b_1, b_2, b_3 \ldots$ bezeichnet. Ein Element ist von niederem Range als ein anderes, wenn es dem letzteren in der natürlichen Ordnung im Alphabet oder Zahlensystem vorangeht; im umgekehrten Falle ist das Element von höherem Range.

Die Anzahl der zu einer Complexion verwendeten Elemente gibt die Classe derselben an. (Vergl. § 10.)

Werden nun jedes Mal alle Elemente zu einer Complexion verwandt, so nennt man sie eine Permutation. Die Complexion ist eine Variation, wenn eine bestimmte Anzahl aus den gegebenen Elementen herausgegriffen wird und diese Elemente in allen möglichen Anordnungen hingestellt werden. Eine Combination ist die Complexion, wenn ebenfalls eine bestimmte Anzahl der gegebenen Elemente verwandt wird, während aber die Complexionen dieser Elemente nur dann als verschieden bezeichnet werden, wenn sie sich durch die Elemente unterscheiden.

A) Permutationen.

§ 2.

Permutationen ohne Wiederholung.

1) Die n Elemente, welche zu permutiren sind, mögen $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$ heissen. Die Anzahl der möglichen Permutationen wird mit $P_{(n)}$ bezeichnet. Um diese zu bestimmen, denke man sich alle Elemente verschieden und die sämmtlichen Permutationen gebildet und hingeschrieben. Nun ordne man dieselben in folgender Weise: Man schreibe erst alle Permutationen hin, die das Element a_1 als erstes Element enthalten, dadurch bekommt man eine Gruppe von so viel Permutationen, als die $(n - 1)$ Elemente $a_2 \dots a_n$ überhaupt zulassen. Dann schreibe man alle Permutationen hin, die a_2 als Anfangselement enthalten. Es entsteht eine Gruppe von so viel Permutationen, als die $(n - 1)$ Elemente $a_1\, a_3 \dots a_n$ zulassen. So fahre man fort bis a_n incl. Man erhält so n Gruppen. In jeder Gruppe sind so viel Permutationen, als bei $(n - 1)$ Elementen möglich sind. Es entsteht demnach die Gleichung $P_{(n)} = n P_{(n-1)}$. Beachtet man nun noch, dass $P_{(1)} = 1$ ist, dass nämlich ein Element nur eine Permutation zulässt, so ergibt sich folgende Reihe von Gleichungen

$$\begin{aligned} P_{(n)} &= n \cdot P_{(n-1)} \\ P_{(n-1)} &= (n-1)\, P_{(n-2)} \\ P_{(n-2)} &= (n-2)\, P_{(n-3)} \\ &\vdots \\ P_{(2)} &= 2 \cdot P_{(1)} \\ P_{(1)} &= 1, \end{aligned}$$

woraus durch Multiplikation die neue Gleichung hervorgeht

$$P_{(1)} \cdot P_{(2)} \cdot P_{(3)} \dots P_{(n-1)}\, P_{(n)} \\ = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \cdot n P_{(1)} \cdot P_{(2)} \dots P_{(n-2)}\, P_{(n-1)},$$

und durch Fortlassung des gleichen Faktors

$$1) \qquad P_{(n)} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n.$$

Das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$ wird durch $n!$ bezeichnet und n Facultät gelesen.

Hier sind die Elemente als verschieden vorausgesetzt. Die Permutationen nennt man dann **Permutationen ohne Wiederholung.** Daher enthält die obige Gleichung den Lehrsatz:

Die Anzahl der Permutationen ohne Wiederholung ist gleich n Facultät.

2*) Die Beziehung $P_{(n)} = nP_{(n-1)}$ lässt sich noch auf eine andere Art ableiten: Man kann die Anzahl der Permutationen aus n Elementen aus der Anzahl der Permutationen aus $(n - 1)$ Elementen dadurch gebildet denken, dass man jeder Permutation der $(n - 1)$ Elemente das $n$te anhängt, alsdann in jeder Permutation dieses $n$te Element der Reihe nach mit jedem der $(n - 1)$ gegebenen vertauscht. Hierdurch erhält man aus jeder Permutation n, also im Ganzen

$$2) \qquad P_{(n)} = nP_{(n-1)}$$

Permutationen.

§ 3.

Bildung der Permutationen.

1) Ist nur Ein Element a gegeben, so gibt es nur **eine** Permutation, nämlich a. Die Permutationen der beiden Elemente a und b sind

$$ab \text{ und } ba.$$

Sind drei Elemente a, b und c gegeben, so bilde man drei Gruppen: eine mit a anfangend, die andere mit b, die dritte mit c, und bilde für jede Gruppe die Permutationen der beiden anderen Elemente. Man erhält

$$\begin{matrix} abc & bac & cab \\ acb & bca & cba, \end{matrix}$$

oder mit den Elementen a_1, a_2 und a_3

$$\begin{matrix} a_1\,a_2\,a_3 & a_2\,a_1\,a_3 & a_3\,a_1\,a_2 \\ a_1\,a_3\,a_2 & a_2\,a_3\,a_1 & a_3\,a_2\,a_1\,. \end{matrix}$$

Für vier Elemente bilde man vier Gruppen nach den Elementen, in jeder Gruppe drei Untergruppen und man permutire in jeder Untergruppe die beiden noch übrig

bleibenden Elemente. Aus folgendem Schema wird das Gesagte klar werden:

$$a \left| \begin{array}{l} b\begin{cases} cd \\ dc \end{cases} \\ c\begin{cases} bd \\ db \end{cases} \\ d\begin{cases} bc \\ cb \end{cases} \end{array} \right. \quad b \left| \begin{array}{l} a\begin{cases} cd \\ dc \end{cases} \\ c\begin{cases} ad \\ da \end{cases} \\ d\begin{cases} ac \\ ca \end{cases} \end{array} \right. \quad c \left| \begin{array}{l} a\begin{cases} bd \\ db \end{cases} \\ b\begin{cases} ad \\ da \end{cases} \\ d\begin{cases} ab \\ ba \end{cases} \end{array} \right. \quad d \left| \begin{array}{l} a\begin{cases} bc \\ cb \end{cases} \\ b\begin{cases} ac \\ ca \end{cases} \\ c\begin{cases} ab \\ ba. \end{cases} \end{array} \right.$$

Man wird hierdurch leicht die Bildungsweise folgender Permutationen verstehen:

$$\begin{array}{lll} a_1\,a_2\,a_3\,a_4 & a_2\,a_1\,a_3\,a_4 & a_3\,a_1\,a_2\,a_4 \\ a_1\,a_2\,a_4\,a_3 & a_2\,a_1\,a_4\,a_3 & a_3\,a_1\,a_4\,a_2 \\ a_1\,a_3\,a_2\,a_4 & a_2\,a_3\,a_1\,a_4 & a_3\,a_2\,a_1\,a_4 \\ a_1\,a_3\,a_4\,a_2 & a_2\,a_3\,a_4\,a_1 & a_3\,a_2\,a_4\,a_1 \\ a_1\,a_4\,a_2\,a_3 & a_2\,a_4\,a_1\,a_3 & a_3\,a_4\,a_1\,a_2 \\ a_1\,a_4\,a_3\,a_2 & a_2\,a_4\,a_3\,a_1 & a_3\,a_4\,a_2\,a_1 \\ & a_4\,a_1\,a_2\,a_3 & \\ & a_4\,a_1\,a_3\,a_2 & \\ & a_4\,a_2\,a_1\,a_3 & \\ & a_4\,a_2\,a_3\,a_1 & \\ & a_4\,a_3\,a_1\,a_2 & \\ & a_4\,a_3\,a_2\,a_1\,. & \end{array}$$

Aus den vorigen Beispielen ergibt sich leicht die Bildung der Permutationen aus 5 Elementen, 6 Elementen etc.

2*) Der erwähnten Bildungsweise liegt die Idee des ersten Beweises des § 2 zu Grunde. Mit Hülfe des zweiten Beweises ergibt sich

$$\begin{array}{llll} 1) & a_1\,a_2\,a_3 & 2) & a_2\,a_1\,a_3 \\ & a_1\,a_3\,a_2 & & a_2\,a_3\,a_1 \\ & a_3\,a_1\,a_2 & & a_3\,a_2\,a_1\,. \end{array}$$

Andere Darstellungsarten werden wir später kennen lernen.

Anmerkung. Die Ableitungen in § 2 mache man sich an den Beispielen dieses Paragraphen klar.

§ 4.

Bestimmung einer gegebenen Permutation.

a) Die unter 1) im vorigen § gegebene Darstellung ist lexikographisch geordnet, wenn die Elemente mit den Buchstaben a, b, c, d, e u. s. w. bezeichnet werden. Will man nun wissen, die wievielste Stelle eine gegebene Permutation, z. B. *dacbe* einnimmt, so bemerkt man leicht, dass diese Permutation in der 4. Colonne steht, da d das vierte unter den Elementen *abcde* ist, dass also 3 Colonnen vorangehen. In jeder befinden sich so viel Permutationen, als die übrigen Elemente *abce* gestatten, nämlich $4!$; demnach enthalten die vorangehenden Colonnen $3 \cdot 4!$ Permutationen. Da a auf d sofort folgen soll, so gehört die gegebene Permutation zu der ersten Gruppe, es geht ihr keine Gruppe von Permutationen voran, was wir durch $0 \cdot 3!$ bezeichnen. Es folgen noch die Elemente *bce*; es soll jedoch c das erste Element sein, also geht die Untergruppe mit b voran, die noch die Permutationen der Elemente *ce* enthält. Es gehen demnach noch $1 \cdot 2!$ Permutationen der gegebenen voran. Da nun die übrigen Elemente in der Ordnung *be* folgen sollen, so erhält man *dacbe* als die $(3 \cdot 4! + 0 \cdot 3! + 1 \cdot 2! + 0 \cdot 1! + 1)$ste, oder als die 75ste Permutation.

Man bestimmt also erst alle vorangehenden Colonnen, Gruppen, Untergruppen u. s. f. und addirt dann 1, um die Stelle der gegebenen Permutation zu erhalten.

Wir wollen noch berechnen, die wievielste Permutation der Elemente 1 2 3 4 5 6 7 die Complexion 5 6 3 2 1 7 4 ist. Dieser Complexion gehen die 4 Colonnen mit je $6!$ Permutationen voran, weil 5 die erste Stelle einnimmt. 6 hat die zweite Stelle, also gehen 4 Gruppen (5 ist bereits verwerthet) mit je $5!$ Permutationen der eigenen Colonne voran. Es folgt 3, nicht 1 oder 2; daher gehen $2 \cdot 4!$ Permutationen der mit 3 anfangenden voran. Fährt man so fort, so erhält man

$$4 \cdot 6! + 4 \cdot 5! + 2 \cdot 4! + 1 \cdot 3! + 0 \cdot 2! + 1 \cdot 1! + 1.$$

oder

$$3416.$$

Ist allgemein eine Permutation aus n Elementen gegeben, so wird ihre Stelle durch die Summe

$$a\cdot(n-1)!+b(n-2)!+c(n-3)!+\cdots\cdots i\cdot 2!+k\cdot 1!+1$$

angezeigt.

Hierbei ist zu bemerken, dass das letzte Glied 1 nicht 0 werden kann, während einige oder alle vorhergehenden Glieder verschwinden können.

Da die Facultäten der Zahlen $1, 2, 3\cdots(n-1)$ als Faktoren der einzelnen Summanden auftreten, so ist es zweckmässig, eine Tabelle derselben anzufertigen. Wir geben die ersten an:

1! =	1	7! =	5,040
2! =	2	8! =	40,320
3! =	6	9! =	362,880
4! =	24	10! =	3,628,800
5! =	120	11! =	39,916,800
6! =	720	12! =	479,001,600.

b) Die umgekehrte Aufgabe, die $k$te Permutation von n gegebenen Elementen hinzuschreiben, lässt sich jetzt ebenfalls leicht lösen. Man bestimmt zuerst die Colonne, dann die Gruppe, ferner die Untergruppe u. s. f. Demnach muss k in die Summe $\alpha(n-1)!+\beta(n-2)!+\cdots+1$ zerlegt werden. Wir wollen zur Fixirung der Idee als Beispiel die 79ste Permutation der Elemente *abcde* wählen:

$$79=3\cdot 4!+1\cdot 3!+0\cdot 2!+0\cdot 1!+1.$$

Es gehen also 3 Colonnen voran; die Permutation steht in der vierten und beginnt daher mit d. In dieser Colonne befindet sich vor der gesuchten Complexion eine Gruppe, das zweite Element ist demnach b. Es folgt a, da keine Untergruppe vorangehen soll, hierauf aus ähnlichem Grunde c und endlich e. Also heisst die gesuchte Permutation

dbace.

§ 5.

Aufgaben.

1) Bilde die Permutationen der Elemente 1, 2 und 3.

Antwort:

1 2 3	2 1 3	3 1 2
1 3 2	2 3 1	3 2 1.

2) Bilde alle Permutationen der Elemente x, y, z, u.

Antwort:

xyzu	*yxzu*	*zxyu*	*uxyz*
xyuz	*yxuz*	*zxuy*	*uxzy*
xzyu	*yzxu*	*zyxu*	*uyxz*
xzuy	*yzux*	*zyux*	*uyzx*
xuyz	*yuxz*	*zuxy*	*uzxy*
xuzy	*yuzx*	*zuyx*	*uzyx*.

3) Bilde alle Permutationen der Buchstaben des Wortes Roma.

Antwort:

Roma	*oRma*	*mRoa*	*aRom*
Roam	**oRam*	*mRao*	**aRmo*
Rmoa	*omRa*	**moRa*	*aoRm*
Rmao	*omaR*	*moaR*	*aomR*
Raom	*oaRm*	**maRo*	*amRo*
**Ramo*	*oamR*	*maoR*	**amoR*.

Die mit einem Sternchen bezeichneten Wörter haben in der lat. Sprache eine Bedeutung.

---

4) Wie gross ist die Anzahl der Permutationen der Complexion *abcdefg?*

Antwort: 5040.

5) In einem Eisenbahnwagen sitzen 10 Personen. Auf wie viel Arten können diese sich ordnen?

Antwort: 3 628 800.

---

6) Bilde die Permutationen von *ab* und leite aus diesen jene von *abc* ab. (S. § 3. 2.)

Antwort:

2. Gr.	4. Gr.
abc	*bac*
acb	*bca*
cba	*cab*.

7) Leite aus den vorigen Permutationen die von *abcd* ab.

Antwort:

I. Gr.	II. Gr.	III. Gr.	IV. Gr.	V. Gr.	VI. Gr.
abcd	*acbd*	*cbad*	*bacd*	*bcad*	*cabd*
abdc	*acdb*	*cbda*	*badc*	*bcda*	*cadb*
adcb	*adbc*	*cdab*	*bdca*	*bdac*	*cdba*
dbca	*dcba*	*dbac*	*dacb*	*dcab*	*dabc*.

---

8) Bilde alle Permutationen von *abcd* lexikographisch, welche mit *c* anfangen.

Antwort: *cabd* *cbad* *cdab*
cadb *cbda* *cdba*.

---

9) Die wievielte Permutation von *baden* ist *abend?*

Antwort: Die $(1 \cdot 4! + 0 \cdot 3! + 1 \cdot 2! + 1 \cdot 1! + 1)$ste $=$ 28ste.

10) Die wievielte Permutation von *roma* ist *mora?*

Antwort: Die 15te.

11) Die wievielte Permutation von *reis* ist *eris?*

Antwort: Die 7te.

12) Bilde die 7912te Permutation von *rauschen.*

Antwort:

$7912 = 1 \cdot 7! + 3 \cdot 6! + 5 \cdot 5! + 4 \cdot 4! + 2 \cdot 3! + 1 \cdot 2! + 1 \cdot 1! + 1,$

daher *acnesuhr.*

Für die Aufgaben 9—12 ist die Ordnung wie in der dritten Aufgabe zu denken.

§ 6.

Permutationen mit Wiederholung.

1) Sind unter den n Elementen $a, b, c, d, e \ldots m$ gleiche b, so bezeichne man die Anzahl derselben mit $P_n^{(m)}$. Man denke sich nun alle $P_n^{(m)}$ Permutationen hingeschrieben, gebe dann den m gleichen Elementen, b, in jeder Complexion Indices. Auf diese Weise erzeugt man in jeder Permutation m noch nicht unter sich permutirte Elemente $b_1, b_2, b_3 \ldots b_m$. Permutirt man diese, ohne die Stellung der andern Elemente zu ändern, so erhält man aus jeder Complexion $m!$ Permutationen, und im Ganzen $n!$ Permutationen. Also ist die Anzahl der Permutationen aus n Elementen, unter denen sich m gleiche befinden,

$$P_n^{(m)} = \frac{n!}{m!}$$

Sind ausser den m gleichen Elementen, b, noch m_1 gleiche c, m_2 gleiche d u. s. f. vorhanden, so findet man durch ähnliche Schlüsse

$$P_{(n)}^{(m,\, m_1,\, m_2\, \ldots)} = \frac{n!}{m!\, m_1!\, m_2! \ldots}$$

2*) Man denke alle n Elemente von einander verschieden und alle Permutationen gebildet. Es sind im Ganzen $n!$ Complexionen. Jetzt sollen die ursprünglich gleichen Elemente wieder gleich werden. Von diesen greife man eine beliebige heraus und suche alle Permutationen, welche dieser gleich sind. Es sind mit der herausgegriffenen $m!$, da dieselben durch Vertauschung der m gleichen Elemente entstanden sind. Aus den noch übrigen wähle man wieder eine beliebige Permutation aus und bilde die Gruppe von $m!$ Permutationen, welche dieser gleich sind. Fährt man so fort, so erhält man eine Reihe von Gruppen, die je $m!$ unter sich gleiche Permutationen enthalten. Die Anzahl der Gruppen ist daher $\frac{n!}{m!}$. Nimmt man nun aus jeder Gruppe eine Permutation, so erhält man alle Permutationen der gegebenen Elemente. Demnach ist

$$P_{(n)}^{(m)} = \frac{n!}{m!}.$$

Diese Beweismethode wollen wir durch ein Beispiel erläutern: $a\,b\,b\,b\,c$. Wir versehen die b mit Indices, so dass wir $a\,b_1\,b_2\,b_3\,c$ bekommen, und permutiren.

1) $a\,b_1\,b_2\,b_3\,c$	9) $a\,b_2\,b_3\,b_1\,c$	17) $a\,b_3\,c\,b_1\,b_2$
2) $a\,b_1\,b_2\,c\,b_3$	10) $a\,b_2\,b_3\,c\,b_1$	18) $a\,b_3\,c\,b_2\,b_1$
3) $a\,b_1\,b_3\,b_2\,c$	11) $a\,b_2\,c\,b_1\,b_3$	19) $a\,c\,b_1\,b_2\,b_3$
4) $a\,b_1\,b_3\,c\,b_2$	12) $a\,b_2\,c\,b_3\,b_1$	20) $a\,c\,b_1\,b_3\,b_2$
5) $a\,b_1\,c\,b_2\,b_3$	13) $a\,b_3\,b_1\,b_2\,c$	21) $a\,c\,b_2\,b_1\,b_3$
6) $a\,b_1\,c\,b_3\,b_2$	14) $a\,b_3\,b_1\,c\,b_2$	22) $a\,c\,b_2\,b_3\,b_1$
7) $a\,b_2\,b_1\,b_3\,c$	15) $a\,b_3\,b_2\,b_1\,c$	23) $a\,c\,b_3\,b_1\,b_2$
8) $a\,b_2\,b_1\,c\,b_3$	16) $a\,b_3\,b_2\,c\,b_1$	24) $a\,c\,b_3\,b_2\,b_1$

u. s. f.

Denken wir jetzt die Indices fort und bilden die Gruppen, welche mit 1) übereinstimmen; dann die, welche mit der ersten noch übrig bleibenden Permutation identisch sind u. s. f., so erhalten wir die Gruppen:

I.	II.	III.	IV.
1) $abbbc$	2) $abbcb$	5) $abcbb$	19) $acbbb$
3) $abbbc$	4) $abbcb$	6) $abcbb$	20) $acbbb$
7) $abbbc$	8) $abbcb$	11) $abcbb$	21) $acbbb$
9) $abbbc$	10) $abbcb$	12) $abcbb$	22) $acbbb$
13) $abbbc$	14) $abbcb$	17) $abcbb$	23) $acbbb$
15) $abbbc$	16) $abbcb$	18) $abcbb$	24) $acbbb$

Von den 4! mit a anfangenden Permutationen, sind also nur $\frac{4!}{3!} = 4$ Permutationen verschieden. Aehnliches ergibt sich für die mit den anderen Elementen beginnenden Complexionen.

§ 7.

Darstellung der Permutationen mit Wiederholung.

Die Bildung der Permutationen mit Wiederholung ergibt sich aus folgenden Beispielen:

1)			
	$a\,a\,b\,c$	$b\,a\,a\,c$	$c\,a\,a\,b$
	$a\,a\,c\,b$	$b\,a\,c\,a$	$c\,a\,b\,a$
	$a\,b\,a\,c$	$b\,c\,a\,a$	$c\,b\,a\,a$.
	$a\,b\,c\,a$		
	$a\,c\,a\,b$		
	$a\,c\,b\,a$		

2)		
	$a\,a\,b\,b\,b$	$b\,a\,a\,b\,b$
	$a\,b\,a\,b\,b$	$b\,a\,b\,a\,b$
	$a\,b\,b\,a\,b$	$b\,a\,b\,b\,a$
	$a\,b\,b\,b\,a$	$b\,b\,a\,a\,b$
		$b\,b\,a\,b\,a$
		$b\,b\,b\,a\,a$.

3)				
	$a\,a\,b\,c\,c$	$a\,c\,a\,b\,c$	$b\,a\,c\,a\,c$	$c\,a\,b\,a\,c$
	$a\,a\,c\,b\,c$	$a\,c\,a\,c\,b$	$b\,a\,c\,c\,a$	$c\,a\,b\,c\,a$
	$a\,a\,c\,c\,b$	$a\,c\,b\,a\,c$	$b\,c\,a\,a\,c$	$c\,a\,c\,a\,b$
	$a\,b\,a\,c\,c$	$a\,c\,b\,c\,a$	$b\,c\,a\,c\,a$	$c\,a\,c\,b\,a$
	$a\,b\,c\,a\,c$	$a\,c\,c\,a\,b$	$b\,c\,c\,a\,a$	$c\,b\,a\,a\,c$
	$a\,b\,c\,c\,a$	$a\,c\,c\,b\,a$	$c\,a\,a\,b\,c$	$c\,b\,a\,c\,a$
		$b\,a\,a\,c\,c$	$c\,a\,a\,c\,b$	$c\,b\,c\,a\,a$
				$c\,c\,a\,a\,b$
				$c\,c\,a\,b\,a$
				$c\,c\,b\,a\,a$.

§ 8.

Bestimmung einer Permutation, wenn einige Elemente gleiche sind.

Das Verfahren wollen wir durch Beispiele klar machen.

1) Es soll angegeben werden, die wievielte Permutation 2 2 3 7 1 8 5 5 5 von 1 2 2 3 5 5 5 7 8 ist.

Da die gegebene Permutation mit 2 beginnt, so geht ihr die Colonne der mit 1 anfangenden Permutationen voran. Diese enthält $\frac{8!}{2!\,3!} = 3360$ Permutationen. Auf 2 folgt nicht 1, sondern 2. Daher gehen noch voran $\frac{7!}{3!} = 840$ Permutationen. Es folgt jetzt 3. Vor der Gruppe, welche mit 3 anfängt, stehen $\frac{6!}{3!} = 120$ mit 22 beginnende Permutationen. Mit 2231 beginnen $\frac{5!}{3!}$ und mit 2235 $\frac{5!}{2!}$ Permutationen. Es folgt auf 7 sofort 1; aber dann 8, so dass man $\frac{3!}{2!} = 3$ addiren muss. Die übrigen Elemente 555 folgen in der natürlichen Ordnung. Man erhält also auf diese Weise:

$$\begin{array}{lrl}
\frac{8!}{2!\,3!} = 3360 & & + 0 \cdot 4! = 0 \\
\frac{7!}{3!} = 840 & & + \frac{3!}{2!} = 3 \\
\frac{6!}{3!} = 120 & & + 0 \cdot 2! = 0 \\
\frac{5!}{3!} = 20 & & + 0 \cdot 1! = 0 \\
\frac{5!}{2!} = 60 & & 1 = 1 \\
\hline
 & & \text{Summa } 4404.
\end{array}$$

2) Es soll die 912te Permutation von $a_1\, a_1\, a_2\, a_3\, a_3\, a_4\, a_5$ bestimmt werden.

Mit	a_1	beginnen	$\frac{6!}{2!} = 360$	Permutationen.	360
„	a_2	„	$\frac{6!}{2!\,2!} = 180$	„	540
„	a_3	„	$\frac{6!}{2!} = 360$	„	900
„	$a_4 a_1 a_1 a_2$	„	$\frac{3!}{2!} = 3$	„	903
„	$a_4 a_1 a_1 a_3$	„	$3! = 6$	„	909
„	$a_4 a_1 a_1 a_5 a_2$	„	$\frac{2!}{2!} = 1$	„	910
„	$a_4 a_1 a_1 a_5 a_3 a_2$	„	$1! = 1$	„	911
„	$a_4 a_1 a_1 a_5 a_3 a_3 a_2$	„		„	912

§ 9.

Aufgaben.

1) Bilde alle Permutationen von $a_1 a_1 a_1 a_2 a_2 a_3$.

Antwort:

$a_1 a_1 a_1 a_2 a_2 a_3$	$a_2 a_1 a_1 a_1 a_2 a_3$
$a_1 a_1 a_1 a_2 a_3 a_2$	$a_2 a_1 a_1 a_1 a_3 a_2$
$a_1 a_1 a_1 a_3 a_2 a_2$	$a_2 a_1 a_1 a_2 a_1 a_3$
$a_1 a_1 a_2 a_1 a_2 a_3$	$a_2 a_1 a_1 a_2 a_3 a_1$
$a_1 a_1 a_2 a_1 a_3 a_2$	$a_2 a_1 a_1 a_3 a_1 a_2$
$a_1 a_1 a_2 a_2 a_1 a_3$	$a_2 a_1 a_1 a_3 a_2 a_1$
$a_1 a_1 a_2 a_2 a_3 a_1$	$a_2 a_1 a_2 a_1 a_1 a_3$
$a_1 a_1 a_2 a_3 a_1 a_2$	$a_2 a_1 a_2 a_1 a_3 a_1$
$a_1 a_1 a_2 a_3 a_2 a_1$	$a_2 a_1 a_2 a_3 a_1 a_1$
$a_1 a_1 a_3 a_1 a_2 a_2$	$a_2 a_1 a_3 a_1 a_1 a_2$
$a_1 a_1 a_3 a_2 a_1 a_2$	$a_2 a_1 a_3 a_1 a_2 a_1$
$a_1 a_1 a_3 a_2 a_2 a_1$	$a_2 a_1 a_3 a_2 a_1 a_1$
$a_1 a_2 a_1 a_1 a_2 a_3$	$a_2 a_2 a_1 a_1 a_1 a_3$
$a_1 a_2 a_1 a_1 a_3 a_2$	$a_2 a_2 a_1 a_1 a_3 a_1$
$a_1 a_2 a_1 a_2 a_1 a_3$	$a_2 a_2 a_1 a_3 a_1 a_1$
$a_1 a_2 a_1 a_2 a_3 a_1$	$a_2 a_2 a_3 a_1 a_1 a_1$
$a_1 a_2 a_1 a_3 a_1 a_2$	$a_2 a_3 a_1 a_1 a_1 a_2$
$a_1 a_2 a_1 a_3 a_2 a_1$	$a_2 a_3 a_1 a_1 a_2 a_1$
$a_1 a_2 a_2 a_1 a_1 a_3$	$a_2 a_3 a_1 a_2 a_1 a_1$
$a_1 a_2 a_2 a_1 a_3 a_1$	$a_2 a_3 a_2 a_1 a_1 a_1$
$a_1 a_2 a_2 a_3 a_1 a_1$	$a_3 a_1 a_1 a_1 a_2 a_2$
$a_1 a_2 a_3 a_1 a_1 a_2$	$a_3 a_1 a_1 a_2 a_1 a_2$
$a_1 a_2 a_3 a_1 a_2 a_1$	$a_3 a_1 a_1 a_2 a_2 a_1$
$a_1 a_2 a_3 a_2 a_1 a_1$	$a_3 a_1 a_2 a_1 a_1 a_2$
$a_1 a_3 a_1 a_1 a_2 a_2$	$a_3 a_1 a_2 a_1 a_2 a_1$
$a_1 a_3 a_1 a_2 a_1 a_2$	$a_3 a_1 a_2 a_2 a_1 a_1$
$a_1 a_3 a_1 a_2 a_2 a_1$	$a_3 a_2 a_1 a_1 a_1 a_2$
$a_1 a_3 a_2 a_1 a_1 a_2$	$a_3 a_2 a_1 a_1 a_2 a_1$
$a_1 a_3 a_2 a_1 a_2 a_1$	$a_3 a_2 a_1 a_2 a_1 a_1$
$a_1 a_3 a_1 a_2 a_1 a_1$	$a_3 a_2 a_2 a_1 a_1 a_1$.

2) Bilde sämmtliche Permutationen von *lallen*.

3) Wie viel Permutationen lassen die m Faktoren der Produkte a^m, $a^{m-1}b$, $a^{m-2}b^2$, $a^{m-3}b^3 \cdots$ etc. zu?

Antwort:

$$1, \frac{m}{1}, \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}, \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot}, \ldots$$

4) Wie viel Permutationen der Faktoren der Produkte a^n, $a^{n-3}b^2c$, $a^{n-4}b^2c^2$, $a^{n-5}b^3c^2$ etc. gibt es?

Antwort:

$$1, \frac{n!}{(n-3)!\,2!\,1!}, \frac{n!}{(n-4)!\,2!\,2!}, \frac{n!}{(n-5)!\,3!\,2!}, \ldots$$

5) Wie viel Versetzungen lassen die Buchstaben in dem Worte *Salamis* zu?

Antwort: 1260.

6) Wie viel Versetzungen lassen die Buchstaben des Wortes *Fernrohr* zu?

Antwort: 6720.

---

7) Bilde alle mit 1 anfangenden Zahlen aus den Ziffern 00112.

Antwort:

10012	10201	11200
10021	10210	12001
10102	11002	12010
10120	11020	12100.

8) Gib alle Permutationen von $aaabbc$ an, die mit cab beginnen.

Antwort:

$c\,a\,b\,a\,a\,b$
$c\,a\,b\,a\,b\,a$
$c\,a\,b\,b\,a\,a.$

9) Wie viel Zahlen aus den Ziffern 3334456777 fangen an mit 34475?

Antwort: 30.

10) Wie viel Zahlen aus denselben Ziffern fangen mit 543 an?

Antwort: 420.

11) Die wievielte Permutation von 122347778 ist 734172782?

Antwort: Die 22396ste.

12) Wie heisst die 90ste Permutation der Buchstaben des Wortes *Cicero?*

Antwort: *creoci.*

B. Variationen.

§ 10.

Erklärungen.

Nach § 1 unterscheidet sich die Variation von der Permutation nur dadurch, dass bei der letzteren in jeder Complexion alle Elemente vorhanden sein müssen, während bei den ersteren zu jeder Complexion nur eine bestimmte Anzahl von Elementen verwandt wird. Nach der Anzahl der in den Complexionen enthaltenen Elemente zerfallen die Variationen in Classen. In der ersten Classe enthält jede Complexion nur ein Element, in der zweiten zwei, in der dritten drei u. s. f. Die Variationen der ersten Classe heissen auch Unionen, der zweiten Binionen oder Amben, der dritten Ternen u. s. w. Ferner kann in jeder Complexion jedes Element nur einmal oder auch öfter vorkommen. Hiernach muss man Variationen ohne und mit Wiederholung unterscheiden.

Wir wollen das Gesagte durch ein Beispiel erläutern. Die Elemente sollen $a_1 a_2 a_3 a_4$ sein. Die Variationen erster Classe (Unionen) ohne Wiederholung sind:

1) $a_1; \quad a_2; \quad a_3; \quad a_4.$

Die Variationen zweiter Classe (Amben, Binionen) ohne Wiederholung:

2)
$$\begin{array}{lll} a_1 a_2, & a_1 a_3, & a_1 a_4 \\ a_2 a_1, & a_2 a_3, & a_2 a_4 \\ a_3 a_1, & a_3 a_2, & a_3 a_4 \\ a_4 a_1, & a_4 a_2, & a_4 a_3. \end{array}$$

Die Variationen dritter Classe (Ternen) ohne Wiederholung:

3) $a_1 a_2 a_3$, $a_1 a_2 a_4$, $a_1 a_3 a_2$, $a_1 a_3 a_4$, $a_1 a_4 a_2$, $a_1 a_4 a_3$
$a_2 a_1 a_3$, $a_2 a_1 a_4$, $a_2 a_3 a_1$, $a_2 a_3 a_4$, $a_2 a_4 a_1$, $a_2 a_4 a_3$
$a_3 a_1 a_2$, $a_3 a_1 a_4$, $a_3 a_2 a_1$, $a_3 a_2 a_4$, $a_3 a_4 a_1$, $a_3 a_4 a_2$
$a_4 a_1 a_2$, $a_4 a_1 a_3$, $a_4 a_2 a_1$, $a_4 a_2 a_3$, $a_4 a_3 a_1$, $a_4 a_3 a_2$
u. s. f.

Die Unionen mit Wiederholung und ohne Wiederholung fallen zusammen.

Die Amben mit Wiederholung sind:

4) $a_1 a_1$, $a_1 a_2$, $a_1 a_3$, $a_1 a_4$
$a_2 a_1$, $a_2 a_2$, $a_2 a_3$, $a_2 a_4$
$a_3 a_1$, $a_3 a_2$, $a_3 a_3$, $a_3 a_4$
$a_4 a_1$, $a_4 a_2$, $a_4 a_3$, $a_4 a_4$
u. s. f.

Aus dem Beispiele ergibt sich noch Folgendes: Die Amben ohne Wiederholung enthalten alle Permutationen je zwei verschiedener Elemente. Sind n Elemente gegeben, so stimmen die Variationen $n$ter Classe ohne Wiederholung mit den Permutationen derselben Elemente überein; eine höhere Classe als die $n$te gibt es nicht. Sollen Variationen mit Wiederholung gebildet werden, so ist die Classenzahl unbeschränkt.

Anmerkung. Eine allgemeinere Definition zu geben, als hier geschehen ist, schien nicht zweckmässig.

§ 11.

Variationen ohne Wiederholung.

Die Anzahl der Variationen $p$ter Classe aus n Elementen wollen wir mit $\mathrm{V}_{(n)}^{(p)}$ bezeichnen. Die Elemente seien $a_1, a_2, a_3 \cdots a_n$. Denkt man sich die Variationen nun so geordnet, dass alle, welche mit a_1 anfangen, die erste Gruppe bilden, alle, welche mit a_2 beginnen, die zweite u. s. f., so erhält man n Gruppen. In jeder derselben sind so viel Variationen, als $n-1$ Elemente zur $p-1$ten Classe zulassen. Demnach ergibt sich die Beziehung

$$1) \qquad \mathrm{V}_{(n)}^{(p)} = n \,.\, \mathrm{V}_{(n-1)}^{(p-1)}.$$

Beachtet man, dass $\overset{(1)}{V}_{(\lambda)} = \lambda$ ist, so gelangt man zu folgender Reihe von Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\overset{(p)}{V}_{(n)} &= n \,.\, \overset{(p-1)}{V}_{(n-1)} \\
\overset{(p-1)}{V}_{(n-1)} &= (n-1)\, \overset{(p-2)}{V}_{(n-2)} \\
\overset{(p-2)}{V}_{(n-2)} &= (n-2)\, \overset{(p-3)}{V}_{(n-3)} \\
&\vdots \\
\overset{2}{V}_{(n-p+2)} &= (n-p+2)\, \overset{1}{V}_{(n-p+1)} \\
\overset{1}{V}_{(n-p+1)} &= (n-p+1)\,.
\end{aligned}$$

Durch Multiplikation und Hebung des gleichen Faktors ergibt sich hieraus

$$2)\quad \overset{(p)}{V}_{(n)} = n\,(n-1)\,(n-2)\cdots(n-p+2)\,(n-p+1).$$

Anmerkung. Das Produkt aus n Faktoren

$$a\,(a+d)\,(a+2\,d)\,(a+3\,d)\,\ldots\,(a+(n-1)\,d)$$

wird kurz durch $a^{n|d}$ bezeichnet und Faktorielle genannt. a ist die Basis, n der Exponent, d die Differenz, welche positiv oder negativ sein kann. $a^{n|d}$ wird gelesen a hoch n mit der Differenz d. Es bestehen die Beziehungen $a^{n|0} = a^n$, $n^{n|-1} = n! = 1^{n|1}$, $n\,(n-1)\,(n-2\cdots(n-p+1) = n^{p|-1}$. Man kann daher schreiben

$$\overset{(p)}{V}_{(n)} = n^{p|-1}\,.$$

§ 12.

Fortsetzung.

Vergleicht man in § 10 2) mit 1) und 3) mit 2), so folgert man leicht, dass die Variationen ohne Wiederholung $p$ter Classe aus n Elementen aus den Variationen $(p-1)$ter Classe aus n Elementen dadurch erhalten werden, dass man jeder Variation $(p-1)$ter Classe jedes noch fehlende Element nach und nach anhängt. Auf diese Weise werden aus jeder Variation $(p-1)$ter Classe $(n-p+1)$ Variationen $p$ter Classe erzeugt. Also ist

$$\overset{(p)}{V}_{(n)} = (n-p+1)\, \overset{(p-1)}{V}_{(n)}\,.$$

Man erhält auf diese Weise alle Variationen. Denn man kann sich dieselben nach dem letzten Elemente geordnet denken, so dass sich in der ersten Gruppe alle mit a_1 schliessenden, in der zweiten die mit a_2 u. s. f. endigenden Variationen befinden. Da nun jede Gruppe nach weggelassenem letzten Elemente sämmtliche Variationen aus $(n-1)$ Elementen $(p-1)$ter Classe enthält, so liefern alle Gruppen alle Variationen $p$ter Classe aus den n gegebenen Elementen.

Ferner kommt keine Variation zweimal vor. Zwei beliebige Variationen sind nämlich entweder aus derselben Variation $(p-1)$ter Classe aus n Elementen oder aus verschiedenen Variationen $(p-1)$ter Classe entstanden. Im ersten Falle unterscheiden sich die Variationen durch das Endelement, im zweiten durch die $(p-1)$ ersten Elemente.

Aus der Gleichung

$$V_{(n)}^{(p)} = (n-p+1)\, V_{(n)}^{(p-1)}$$

lässt sich ebenfalls die Relation

$$V_{(n)}^{(p)} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+2)(n-p+1)$$

ableiten.

§ 13.

Beziehung zwischen den Variationen ohne Wiederholung und den Permutationen.

Nach § 11 2) ist

$$V_{(n)}^{(p)} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1),$$

demnach ist

$$V_{(n)}^{(p)} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)(n-p)(n-p-1)\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(n-p)(n-p-1)\cdots 2\cdot 1}$$

$$= \frac{n!}{(n-p)!} = \frac{P_{(n)}}{P_{(n-p)}}.$$

Diese Relation lässt sich direct ableiten. Man bilde nämlich alle Permutationen der n Elemente, theile jede Permutation durch einen Strich in zwei Theile, von denen der erste p, der zweite also $(n-p)$ Elemente enthält und stelle dann diejenigen Permutationen zu je einer Gruppe zusammen, welche in dem ersten Theile übereinstimmen. Die Anzahl der Gruppen gibt die Anzahl der Variationen $p$ter Classe der n gegebenen Elemente.

In jeder Gruppe befinden sich so viel Permutationen, als die $(n-p)$ letzten Elemente Versetzungen unter sich zulassen, nämlich $(n-p)!$. Also sind $\frac{n!}{(n-p)!}$ Gruppen vorhanden und es ist

$$V_{(n)}^{(p)} = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Der Beweis wird aus folgendem Beispiel klar werden:

1) $a_1 a_2$	$a_3 a_4$	2) $a_1 a_3$	$a_2 a_4$	3) $a_1 a_4$	$a_2 a_3$	4) $a_2 a_1$	$a_3 a_4$
$a_1 a_2$	$a_4 a_3$	$a_1 a_3$	$a_4 a_2$	$a_1 a_4$	$a_3 a_2$	$a_2 a_1$	$a_4 a_3$
5) $a_2 a_3$	$a_1 a_4$	6) $a_2 a_4$	$a_1 a_3$	7) $a_3 a_1$	$a_2 a_4$	8) $a_3 a_2$	$a_1 a_4$
$a_2 a_3$	$a_4 a_1$	$a_2 a_4$	$a_3 a_1$	$a_3 a_1$	$a_4 a_2$	$a_3 a_2$	$a_4 a_1$
9) $a_3 a_4$	$a_1 a_2$	10) $a_4 a_1$	$a_2 a_3$	11) $a_4 a_2$	$a_1 a_3$	12) $a_4 a_3$	$a_1 a_2$
$a_3 a_4$	$a_2 a_1$	$a_4 a_1$	$a_3 a_2$	$a_4 a_2$	$a_3 a_1$	$a_4 a_3$	$a_2 a_1$.

Aus jeder Gruppe nimmt man eine Complexion links vom Strich und erhält dadurch alle 12 Variationen 2ter Classe der 4 Elemente $a_1 a_2 a_3 a_4$.

Aus $$V_{(n)}^{(p)} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1) \text{ folgt}$$
$$V_{(n)}^{(n)} = n!$$

Die Anzahl der Variationen ohne Wiederholung der höchsten Classe ist gleich der Anzahl der Permutationen aller Elemente.

Uebrigens stimmen hierbei die Variationen mit den Permutationen überein. Diese stellen sich also als ein besonderer Fall der ersteren dar. Im vorigen Beweise dagegen bildeten die Variationen ohne Wiederholung einen besonderen Fall der Permutationen. Der Zusammenhang dieser Complexionen ist also ein sehr enger.

§ 14.

Aufgaben.

1) Bilde die Variationen der 2. Classe ohne Wiederholung für 0 1 2 3 4 5.

Antwort:					
01	10	20	30	40	50
02	12	21	31	41	51
03	13	23	32	42	52
04	14	24	34	43	53
05	15	25	35	45	54.

2) Stelle die Variationen der 4. Classe ohne Wiederholung der Elemente *abcde* dar.

a b c d	*a d b e*	*b a c e*	*b d c a*
a b c e	*a d c b*	*b a d c*	*b d c e*
a b d c	*a d c e*	*b a d e*	*b d e a*
a b d e	*a d e b*	*b a e c*	*b d e c*
a b e c	*a d e c*	*b a e d*	*b e a c*
a b e d	*a e b c*	*b c a d*	*b e a d*
a c b d	*a e b d*	*b c a e*	*b e c a*
a c b e	*a e c b*	*b c d a*	*b e c d*
a c d b	*a e c d*	*b c d e*	*b e d a*
a c d e	*a e d c*	*b c e a*	*b e d c*
a c e b	*a e c d*	*b c e d*	——
a c e d	——	*b d a c*	*c a b d*
a d b c	*b a c d*	*b d a e*	*c a b e*

u. s. w.

3) Bilde die Variationen der 3. Classe ohne Wiederholung für *abc*.

Antwort: *a b c* *b a c* *c a b*
a c b *b c a* *c b a*.

4) Wie viel dreizifferige Zahlen gibt es, die ungleiche Ziffern haben?

Anmerkung. Mit 0 darf keine Zahl beginnen.

Antwort: 648.

5) Wie oft lassen sich die 25 Buchstaben des Alphabets zu dreien ohne Wiederholung variiren?

Antwort: 13800 Mal.

6) Die wievielte Variation der 3. Classe ohne Wiederholung der 10 Ziffern ist die Zahl 538?

Antwort:

Die $[4\,(9 \cdot 8) + 3 \cdot (8) + 6 \cdot (1) + 1]$te = 319te.

7) Die wievielte Variation der 3. Classe ohne Wiederholung der Elemente *efinwr* ist *wie*?

Antwort: Die 89ste.

8) Wie heisst die 10te Variation der 2. Classe ohne Wiederholung der Ziffern 1 bis 9?

Antwort: 2 3.

9) Wie heisst die 52ste Variation der 4. Classe ohne Wiederholung der 25 Buchstaben des Alphabets?

Antwort: *Abel.*

§ 15.

Variationen mit Wiederholung.

Die Anzahl der Variationen $m$ter Classe aus n Elementen mit Wiederholung bezeichnen wir mit $\overset{w}{V}{}_{(n)}^{(m)}$. Denkt man sich alle Variationen $m$ter Classe der n Elemente $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ gebildet und so geordnet, dass alle mit a_1 anfangenden die erste Abtheilung, alle mit a_2 beginnenden die zweite, u. s. f. sind, so erhält man n Gruppen. In jeder derselben sind so viele Variationen enthalten, als n Elemente zur $m - 1$ten Classe mit Wiederholung zulassen. Hieraus ergibt sich die Relation

$$\overset{w}{V}{}_{(n)}^{(m)} = n \cdot \overset{w}{V}{}_{(n)}^{(m-1)}.$$

Ferner erhält man

$$\overset{w}{V}{}_{(n)}^{(m-1)} = n \overset{w}{V}{}_{(n)}^{(m-2)}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\overset{w}{V}{}_{(n)}^{2} = n \overset{w}{V}{}_{(n)}^{1}$$

$$\overset{w}{V}{}_{(n)}^{1} = n$$

und schliesslich

$$\overset{w}{V}{}_{(n)}^{(m)} = n^m.$$

§ 16.

Aufgaben.

1) Bilde sämmtliche zweiziffrige Zahlen aus den Ziffern 3 6 7 9.

Antwort:	33	63	73	93
	36	66	76	96
	37	67	77	97
	39	69	79	99.

2) Bilde alle dreiziffrigen Zahlen, welche 0, 1, 2 als Ziffern haben.

Antwort:
100, 101, 102, 110, 111, 112, 120, 121, 122,
200, 201, 202, 210, 211, 212, 220, 221, 222.

3) Die wievielte Variation 4. Classe mit Wiederholung von *bel* ist *lebe*?

Antwort: Die 65ste.

4) Wie viel dreiziffrige Zahlen gibt es?

Antwort: 900.

C) Combinationen.

§ 17.

Combinationen ohne Wiederholung.

1) Die Combinationen ohne Wiederholung unterscheiden sich von den Variationen ohne Wiederholung dadurch, dass bei jenen die Anordnung nicht berücksichtigt wird. Als Combination ist demnach *bac* von *cab* nicht verschieden, da beide Complexionen dieselben Elemente enthalten. Die Benennungen sind denjenigen bei den Variationen analog und bedürfen daher keiner Erklärung. Man pflegt jede Combination gut geordnet hinzuschreiben, so dass niemals ein früheres Element einem späteren folgt, nicht *cad* sondern *acd* ist die gewöhnliche Form.

Permutirt man jede Combination $p$ter Classe aus n Elementen ohne Wiederholung, so erhält man alle und nur alle Variationen $p$ter Classe derselben n Elemente ohne Wiederholung.

Denn irgend eine Variation kann durch Permutation aus der gut geordneten Form derselben Elemente, also aus einer Combination gebildet werden. Demnach fehlt keine Variation. Unter denselben sind aber auch keine gleichen. Denn zwei dieser Variationen sind entweder aus derselben

oder aus verschiedenen Combinationen hervorgegangen. Im ersten Falle unterscheiden sie sich durch die Stellung der Elemente, im zweiten wenigstens durch ein Element.

Da nun jede Combination p Elemente enthält und diese $p!$ verschiedene Permutationen zulassen, so werden aus jeder Combination $p!$ Variationen erzeugt. Die Anzahl der Variationen ist $n(n-1)\ldots(n-p+1)$. Man bekommt also

$$p!\cdot C_{(n)}^{(p)} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)$$

oder

$$C_{(n)}^{(p)} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots p}.$$

Die rechte Seite ist der $p$te Binomial-Coefficient und wird von uns mit n_p bezeichnet. Man schreibt hiernach kurz

$$1)\qquad C_{(n)}^{(p)} = n_p.$$

2*) Diese Gleichung lässt sich ohne Hilfe der Variationen nachweisen: Man denke alle Combinationen $(p-1)$ter Classe aus den n Elementen gebildet und füge jeder Combination jedes noch fehlende Element hinzu. Man erhält so $(n-p+1)$ Combinationen aus jeder gegebenen. Diese Combinationen sind aber nicht alle verschieden; denn eine beliebige derselben ist erstens durch Hinzufügung des ersten Elementes, zweitens des zweiten u. s. w., also im Ganzen $p$mal entstanden.

Demnach ist

$$C_{(n)}^{(p)} = \frac{n-p+1}{p}\cdot C_{(n)}^{(p-1)}.$$

Ebenso

$$C_{(n)}^{(p-1)} = \frac{n-p+2}{p-1}\cdot C_{(n)}^{p-2}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$C_{(n)}^{(2)} = \frac{n-1}{2}\cdot C_{(n)}^{(1)}$$

$$C_{(n)}^{(1)} = \frac{n}{1}.$$

Hieraus folgt

$$C_{(n)}^{(p)} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{1\cdot 2\cdots p} = n_p.$$

§ 18.

Zusammenhang mit andern Complexionen.

Aus dem ersten Beweise des vorigen Paragraphen ergibt sich direct eine Beziehung der drei Complexionsarten ohne Wiederholung, nämlich

$$1)\qquad P_{(p)} \cdot C_{(n)}^{(p)} = V_{(n)}^{(p)}.$$

Ferner ist

$$C_{(n)}^{(p)} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}{1\cdot 2\cdot 3 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad p}$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)(n-p)(n-p-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3 \quad \cdot \quad p \quad \cdot \quad (n-p)(n-p-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}$$

$$= \frac{n!}{p!\,(n-p)!}.$$

Oder es ist

$$2)\qquad P_{(p)} \cdot P_{(n-p)} \cdot C_{(n)}^{(p)} = P_{(n)}.$$

Hierzu füge ich noch die im zweiten Beweise des vorigen Paragraphen gewonnene Beziehung

$$3)\qquad C_{(n)}^{(p)} = \frac{n-p+1}{p}\, C_{(n)}^{(p-1)}.$$

Mit Benutzung der in § 6 abgeleiteten Gleichung erhält man aus 2)

$$4)\qquad C_{(n)}^{(p)} = P_{(n)}^{(p,\, n-p)}.$$

Setzt man in 4) für p $(n-p)$, so wird

$$C_{(n)}^{(n-p)} = P_{(n)}^{(n-p,\, p)}.$$

Also ist

$$5)\qquad C_{(n)}^{(p)} = C_{(n)}^{(n-p)}.$$

Diese Gleichung kann man unabhängig bilden: Aus jeder Combination $(n-p)$ter Classe ohne Wiederholung lässt sich eine Combination $p$ter Classe dadurch bilden, dass man aus dem gegebenen Elementensystem jene $(n-p)$ Elemente streicht. Die so erhaltenen Combinationen sind verschieden, weil sich diejenigen $(n-p)$ter Classe unterscheiden. Man hat auch alle Combinationen $p$ter Classe erhalten; denn wenn eine fehlte, so würde man die Elemente derselben aus dem gegebenen Elementensystem weglassen, wodurch eine

Combination $(n-p)$ter Classe entstehen würde, die nun ebenfalls fehlte, was gegen die Annahme ist.

Daher hat man

$$C_{(n)}^{(p)} = C_{(n)}^{(n-p)}.$$

§ 19.

Vertheilung aller Elemente.

1) Sollen n Elemente so vertheilt werden, dass in der ersten Gruppe m_1, in der zweiten m_2, in der dritten m_3 Elemente etc. stehen, so dass die Anordnung in jeder Gruppe nicht berücksichtigt wird, so bilde man zunächst alle Combinationen $m_1$ter Classe aus n Elementen. Man erhält n_{m_1} verschiedene Combinationen, die nach und nach in die erste Gruppe zu bringen sind. Greift man eine dieser Combinationen heraus, streicht ihre Elemente aus den gegebenen n, so bleiben noch $(n-m_1)$ Elemente übrig, aus diesen lassen sich $(n-m_1)_{m_2}$ Combinationen der $m_2$ten Classe bilden. Demnach erhält man im Ganzen $n_{m_1} \cdot (n-m_1)_{m_2}$ Anordnungen. Man wähle eine beliebige derselben aus: Es bleiben von den n Elementen noch je $(n-m_1-m_2)$ übrig, die je $(n-m_1-m_2)_{m_3}$ verschiedene Combinationen zulassen; es ergeben sich also bereits $n_{m_1}(n-m_1)_{m_2}(n-m_1-m_2)_{m_3}$ verschiedene Vertheilungen. Fährt man so fort, so findet man als Anzahl aller möglichen Vertheilungen

1) $Z = n_{m_1} \cdot (n-m_1)_{m_2} (n-m_1-m_2)_{m_3} (n-m_1-m_2-m)_{m_4} \cdots$

Hierbei ist darauf zu achten, dass

$$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 \cdots = n$$

sein muss, und dass jede Combination einer bestimmten Gruppe zugewiesen ist, dass z. B. die erhaltene Combination aus m_4 Elementen nur in die Gruppe 4 gestellt werden darf. Der Ausdruck in 1) lässt sich noch umformen:

$$Z = \frac{n(n-1)\cdots(n-m_1+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m_1} \cdot \frac{(n-m_1)\cdot(n-m_1-1)\cdots(n-m_1-m_2+1)}{1\cdot 2\cdots m_2}$$

$$\times \frac{(n-m_1-m_2)(n-m_1-m_2-1)\cdots(n-m_1-m_2-m_3+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m_3} \cdots \frac{\cdots 1}{m_\alpha!}.$$

2) $$Z = \frac{n!}{m_1!\, m_2!\, m_3! \cdots}.$$

2*) Diese Formel kann man mit Hilfe der Permutationen ableiten.

Man bilde alle Permutationen der gegebenen n Elemente. In jeder Permutation scheide man die ersten m_1 Elemente durch einen Strich ab, dann die m_2 folgenden, ferner die m_3 u. s. f. Man erhält auf diese Weise $P_{(n)}$ Vertheilungen. Als Combinationen gehören aber in der ersten Gruppe stets so viele zusammen, als m_1 Elemente Vertauschungen zulassen. Demnach ist $P_{(n)}$ durch $P_{(m_1)}$ zu dividiren. Aehnliches gilt für die anderen Gruppen. Daher hat man

$$3) \qquad Z = \frac{P_{(n)}}{P_{(m_1)}\, P_{(m_2)}\, P_{(m_3)} \cdots}$$

woraus sich 2) sofort ergibt.

Findet die Gleichung statt

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = \cdots$$

so ist die Gruppe nicht bestimmt. Sollen also diejenigen Vertheilungen nicht als verschieden betrachtet werden, die nur durch die Anordnung der Gruppen von einander abweichen, so sind unter ihnen so viel gleiche Vertheilungen, als die Gruppen sich vertauschen lassen. Bei α Gruppen erhält man hiernach

$$4) \qquad Z' = \frac{n!}{(m_1!)^\alpha\, \alpha!}, \text{ wo } \alpha \cdot m_1 = n \text{ ist.}$$

Diese Betrachtungen lassen sich leicht auf den Fall ausdehnen, wo nur einige Gruppen gleichviel Elemente haben.

Sind auch gleiche Elemente unter den gegebenen, so erhalten wir eine Art der Vertheilung, die bei der Berechnung gewisser symmetrischer Funktionen mit Vortheil angewandt wird und die wir aus diesem Grunde nicht umgehen können. Wir wollen die Art der Ableitung durch Beispiele erläutern. Es sei die Complexion $a_1^3 a_2 a_3 a_4$ gegeben; es soll bestimmt werden, auf wie viel verschiedene Arten dieselbe aus drei Gruppen gebildet sein kann, von denen die erste ein Element enthält, die zweite Combinationen zu zweien ohne Wiederholung, die dritte eine Combination dritter Classe ohne Wiederholung.

Da die erste Gruppe das Element a_1 enthalten soll, so ist die Frage auf die Untersuchung der Anzahl der möglichen Vertheilungen der fünf übrigen Elemente in die beiden letzten Gruppen zurückgeführt.

In keiner dieser beiden Gruppen dürfen Wiederholungen vorkommen. Es ist daher nothwendig unter den beiden Ele-

menten der zweiten Gruppe das Element a_1. Es braucht also nur noch festgestellt zu werden, wie oft sich die drei übrigen Elemente $a_2 a_3 a_4$ in zwei Theile spalten lassen, dass der erste ein Element enthält. Man erhält drei.

Behandelt man $a_1^2 a_2 a_3 a_4 a_5$ unter denselben Voraussetzungen, so überlegt man so: Entweder enthält die erste Gruppe a_1 oder ein anderes Element. Enthält sie a_1, so kann die 2. Gruppe noch die Elemente $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$ zu zweien ohne Wiederholung combinirt enthalten. Dieses ist auf $\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$fache Weise möglich. Enthält die erste Gruppe das Element a_1 nicht, so muss die zweite dieses enthalten. Da von den andern Elementen nur noch drei übrig sind, so gehören zu jeder dieser drei Gruppen 2, im Ganzen 12. Demnach sind 22 Vertheilungen möglich.

§ 20.

Darstellung der Combinationen ohne Wiederholung.

Wir müssen hier berücksichtigen, dass wir uns die Combinationen wohl geordnet denken. Die Art der Darstellung wird dann sofort aus einem Beispiele klar werden. Die Elemente seien *abcdef*; es sollen die Combinationen 4. Classe ohne Wiederholung gebildet werden.

$$a\left\{\begin{array}{l} b\left\{\begin{array}{l} c\left\{\begin{array}{l} d\\ e\\ f\end{array}\right.\\ d\left\{\begin{array}{l} e\\ f\end{array}\right.\\ e-f\end{array}\right.\\ c\left\{\begin{array}{l} d\left\{\begin{array}{l} e\\ f\end{array}\right.\\ e-f\end{array}\right.\\ d\left\{ef\right.\end{array}\right. \qquad b\left\{\begin{array}{l} c\left\{\begin{array}{l} d\left\{\begin{array}{l} e\\ f\end{array}\right.\\ e-f\end{array}\right.\\ d\left\{ef\right.\end{array}\right. \qquad c\left\{def,\right.$$

oder, anders geschrieben,

a b c d	*a c d e*	*b c e f*
a b c e	*a c d f*	*b d e f*
a b c f	*a c e f*	*c d e f.*
a b d e	*a d e f*	
a b d f	*b c d e*	
a b e f	*b c d f*	

§ 21.

Aufgaben.

1) Bilde die Combinationen 3. Classe ohne Wiederholung der Elemente 0, 1, 2, 3, 4.

Antwort: 012 023 123 234.
013 024 124
014 034 134

2) Bilde die Amben ohne Wiederholung der Elemente $a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5$.

Antwort: $a_1 a_2$; $a_1 a_4$; $a_2 a_3$; $a_2 a_5$; $a_3 a_5$;
$a_1 a_3$; $a_1 a_5$; $a_2 a_4$; $a_3 a_4$; $a_4 a_5$.

Man achte auf die Zweideutigkeit der Wörter Unionen, Amben u. s. w. Vergl. Variationen.

---

3) Wie viel Combinationen ohne Wiederholung haben 10 Elemente in der 8. Classe?

Antwort: 45. (Man benutze § 18, 5.)

4) Auf wie viel Arten können je zwei der Farben: Roth, Orange, Gelb, Grün, Blau, Violett zu neuen Farben vermischt werden?

Antwort: 15.

5) Wie verfährt man, wenn n Punkte ohne Berücksichtigung der Richtung durch alle möglichen Geraden verbunden werden sollen?

Antwort:
Man zieht 1 2, dann 1 3, 1 4, 1 5 ... 1 n, ferner 2 3, 2 4 2 5 ... 2 n; weiter 3 4, 3 5 · 3 n u. s. f. (2 1 und 1 2 unterscheiden sich nur durch die Richtung.)

6) Durch wie viel gerade Linien lassen sich 21 Punkte verbinden?

Antwort: 210.

---

7) Es sind die Elemente $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6$ gegeben. Diese Elemente auf alle möglichen Arten so zu vertheilen, dass in der ersten Gruppe je 4, in der zweiten je 2 Elemente sind.

Antwort:

1)	$a_1 a_2 a_3 a_4$;	$a_5 a_6$	8)	$a_1 a_3 a_4 a_6$;	$a_2 a_5$
2)	$a_1 a_2 a_3 a_5$;	$a_4 a_6$	9)	$a_1 a_3 a_5 a_6$;	$a_2 a_4$
3)	$a_1 a_2 a_3 a_6$;	$a_4 a_5$	10)	$a_1 a_4 a_5 a_6$;	$a_2 a_3$
4)	$a_1 a_2 a_4 a_5$;	$a_3 a_6$	11)	$a_2 a_3 a_4 a_5$;	$a_1 a_6$
5)	$a_1 a_2 a_4 a_6$;	$a_3 a_5$	12)	$a_2 a_3 a_4 a_6$;	$a_1 a_5$
6)	$a_1 a_2 a_5 a_6$;	$a_3 a_4$	13)	$a_2 a_3 a_5 a_6$;	$a_1 a_4$
7)	$a_1 a_3 a_4 a_5$;	$a_2 a_6$	14)	$a_2 a_4 a_5 a_6$;	$a_1 a_3$
			15)	$a_3 a_4 a_5 a_6$;	$a_1 a_2$.

8) Auf wie viel Arten lassen sich 10 Elemente in 3 Gruppen so vertheilen, dass in der ersten 5, in der zweiten 3, in der dritten 2 Elemente sich befinden?

Antwort: 2520.

9) Auf wieviel Arten lässt sich das Produkt $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ in Produkte von je zwei Faktoren zerlegen?

Antwort: 15.

10) Bilde alle Vertheilungen von $a_1^2 a_2^2 a_3 a_4$, so dass in der ersten Gruppe Comb. der ersten Classe, in der zweiten solche der zweiten ohne Wiederholung stehen.

Antwort:

a_1	$a_1 a_2$	$a_2 a_3 a_4$
a_1	$a_2 a_3$	$a_1 a_2 a_4$
	$a_2 a_4$	$a_1 a_2 a_3$
a_2	$a_1 a_2$	$a_1 a_3 a_4$
	$a_1 a_3$	$a_1 a_2 a_4$
	$a_1 a_4$	$a_1 a_2 a_3$
a_3	$a_1 a_2$	$a_1 a_2 a_4$
a_4	$a_1 a_2$	$a_1 a_2 a_3$.

11) Bilde alle Gruppen unter denselben Bedingungen aus $a_1^2 a_2^2 a_3^2$.

Antwort:

a_1	$a_2 a_3$	$a_1 a_2 a_3$
a_2	$a_1 a_3$	$a_1 a_2 a_2$
a_3	$a_1 a_2$	$a_1 a_2 a_3$.

12) Wie viel solcher Vertheilungen lassen sich aus $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6$ ableiten.

Antwort: 60.

§ 22.

Analyse verschiedener Combinationen mit Wiederholung.

Ist die Combination $a_1\,a_1\,a_1\,a_1\,a_1$ gegeben, so lässt sich dieselbe auf fünf Arten aus den entsprechenden Combinationen 4. Classe herleiten, indem man nämlich erstens das Element a_1 schlechtweg hinzufügt, und indem man zweitens jedes Element dazu schreibt, welches die Combination $a_1\,a_1\,a_1\,a_1$ bereits enthält.

Die Combination $a_1\,a_1\,a_1\,a_2\,a_2$ kann entstehen aus $a_1\,a_1\,a_1\,a_2$ und aus $a_1\,a_1\,a_2\,a_2$. Aus der Combination $a_1\,a_1\,a_1\,a_2$ erhalte ich eine Combination 5. Classe, indem ich das Element a_2 schlechtweg hinzufüge, und vier andere, indem ich jedes bereits in ihr enthaltene Element hinzufüge; im Ganzen also fünf. Ebenso gehen fünf Combinationen aus $a_1\,a_1\,a_2\,a_2$ hervor.

Wären sieben Elemente gegeben, so würde man aus der Combination $a_1\,a_1\,a_1\,a_3$ sieben Combinationen 5. Classe dadurch erzeugen, dass man jedes Element einzeln hinzufügt; drei neue dadurch, dass man das Element a_1 so oft hinzufügt, als es bereits vorkommt; eine neue durch Hinzufügung des Elementes a_3. Im Ganzen entstehen also $7 + 4$ Combinationen 5. Classe aus der Combination $a_1\,a_1\,a_1\,a_3$. Diese Combinationen sind

$a_1\,a_1\,a_1\,a_1\,a_3$; $a_1\,a_1\,a_1\,a_2\,a_3$; $a_1\,a_1\,a_1\,a_3\,a_3$; $a_1\,a_1\,a_1\,a_3\,a_4$;
$a_1\,a_1\,a_1\,a_3\,a_5$; $a_1\,a_1\,a_1\,a_3\,a_6$; $a_1\,a_1\,a_1\,a_3\,a_7$;
$a_1\,a_1\,a_1\,a_1\,a_3$; $a_1\,a_1\,a_1\,a_1\,a_3$; $a_1\,a_1\,a_1\,a_1\,a_3$; $a_1\,a_1\,a_1\,a_3\,a_3$.

Wie oft entsteht jede dieser Combinationen, wenn man mit allen Combinationen 4. Classe mit Wiederholung ebenso verfährt?

Die Combination $a_1\,a_1\,a_1\,a_1\,a_3$ ist erstens aus $a_1\,a_1\,a_1\,a_1$ dadurch hervorgegangen, dass das Element a_3 schlechtweg hinzugesetzt ist; sie ist zweitens aus $a_1\,a_1\,a_1\,a_3$ dadurch erzeugt, dass a_1 schlechtweg und ausserdem dreimal hinzugefügt ist. Also ist $a_1\,a_1\,a_1\,a_1\,a_3$ im Ganzen fünfmal gebildet. Dasselbe leitet man für jede andere Combination ab.

§. 23.

Anzahl der Combinationen mit Wiederholung.

Sind n Elemente gegeben, so soll die Anzahl der Combinationen mit Wiederholung durch $\overset{w}{C}{}_{(n)}^{(m)}$ angedeutet werden.

Zu jeder Combination $(m-1)$ter Classe füge man zunächst jedes der n Elemente hinzu und alsdann jedes bereits in der Combination enthaltene Element. Man erhält so aus jeder Combination $n + (m - 1)$ Combinationen $m$ter Classe also im Ganzen

$$(n + m - 1)\, \overset{w}{C}{}_{(n)}^{(m-1)}.$$

Um zu erkennen, wie oft jede dieser Combinationen sich wiederholt, greifen wir eine beliebige

$$\mathfrak{C} = \overbrace{a_\alpha\, a_\alpha\, a_\alpha \ldots}^{\alpha'} \;\overbrace{a_\beta\, a_\beta \ldots .}^{\beta'} \;\overbrace{a_\gamma\, a_\gamma\, a_\gamma\, a_\gamma \ldots \ldots}^{\gamma'} \;\overbrace{\ldots .}$$

heraus, in welcher a_α α'mal, a_β β'mal etc. vorkommen mag, und wo $\alpha' + \beta' + \gamma' + \ldots = m$ ist. Die Combination $\mathfrak{C}$ ist erstens aus der Combination

$$\mathfrak{C}_1 = \overbrace{a_\alpha\, a_\alpha\, a_\alpha \ldots}^{\alpha' - 1} \;\overbrace{a_\beta\, a_\beta\, a_\beta \ldots}^{\beta'} \;\overbrace{a_\gamma\, a_\gamma \ldots}^{\gamma'}$$

hervorgegangen und zwar dadurch, dass das Element a_α schlechtweg, und dadurch, dass a_α noch so oft hinzugefügt wurde, als es in $\mathfrak{C}_1$ enthalten ist; also im Ganzen α'mal.

Zweitens ist $\mathfrak{C}$ entstanden aus

$$\mathfrak{C}_2 = \overbrace{a_\alpha\, a_\alpha\, a_\alpha \ldots}^{\alpha'} \;\overbrace{a_\beta\, a_\beta \ldots .}^{\beta' - 1} \;\overbrace{a_\gamma\, a_\gamma \ldots .}^{\gamma'}$$

Man hat das Element a_β schlechtweg und ausserdem so oft hinzugefügt, als es in $\mathfrak{C}_2$ enthalten ist; also sind β' gleiche Combinationen entstanden. Aehnliches gilt für die andern Gruppen. Demnach kommt $\mathfrak{C}$

$$\alpha' + \beta' + \gamma' + \ldots = m\text{mal vor.}$$

Dasselbe gilt von jeder Combination, wodurch sich die Gleichung

$$1) \qquad \overset{w}{C}{}_{(n)}^{(m)} = \frac{n + m - 1}{m}\, \overset{w}{C}{}_{(n)}^{(m-1)}.$$

ergibt.

Ferner ist

$$\overset{w}{C}{}^{(1)}_{(n)} = n.$$

Hiermit erhält man

$$\overset{w}{C}{}^{(m)}_{(n)} = \frac{n+m-1}{m} \overset{w}{C}{}^{(m-1)}_{(n)}$$

$$\overset{w}{C}{}^{(m-1)}_{(n)} = \frac{n+m-2}{m-1} \overset{w}{C}{}^{(m-2)}_{(n)}$$

$$\vdots$$

$$\overset{w}{C}{}^{(2)}_{(n)} = \frac{n+1}{2} \overset{w}{C}{}^{(1)}_{(n)}$$

$$\overset{w}{C}{}^{(1)}_{(n)} = \frac{n}{1},$$

und durch Multiplication

$$2)\quad \overset{w}{C}{}^{(m)}_{(n)} = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots\ldots(n+m-2)(n+m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots m.}$$

oder

$$3)\quad \overset{w}{C}{}^{(m)}_{(n)} = (n+m-1)_m.$$

§ 24.

Folgerungen.

Aus § 17 und § 23, 3) folgt, dass

$$1)\quad \overset{w}{C}{}^{(m)}_{(n)} = \overset{w}{C}{}^{(m)}_{(n+m-1)}.$$

Umgekehrt kann man aus den Combinationen mit Wiederholung Combinationen ohne Wiederholung herleiten, um so die Beziehung 1) zu gewinnen, wodurch man dann weiter zu § 23 gelangt. Die Formel 1) ergibt sich auf folgende Weise:

Man bilde alle Combinationen $m$ter Classe aus n Elementen mit Wiederholung; man bilde aus jeder dieser Combinationen eine neue dadurch, dass man das zweite Element um eine Stelle erhöht, das dritte um zwei, das $m$te um $m - 1$, während das erste ungeändert bleibt. So verwandelt sich jede Combination mit Wiederholung in eine Combination ohne Wiederholung; jedoch beträgt hier die Anzahl der Elemente

$n + m - 1$. Da man übrigens alle Combinationen ohne Wiederholung erhält, so folgt die Gleichung 1).

Ein Beipiel soll diesen Beweis klar machen.

Gegeben sind die Elemente a_1, a_2, a_3, a_4. Die Combinationen dritter Classe sind zu bilden:

	mit Wiederh.	ohne Wiederh. 4 + 2 El.	mit Wiederh.	ohne Wiederh.
1)	$a_1 a_1 a_1$	$a_1 a_2 a_3$	$a_2 a_2 a_2$	$a_2 a_3 a_4$
2)	$a_1 a_1 a_2$	$a_1 a_2 a_4$	$a_2 a_2 a_3$	$a_2 a_3 a_5$
3)	$a_1 a_1 a_3$	$a_1 a_2 a_5$	$a_2 a_2 a_4$	$a_2 a_3 a_6$
4)	$a_1 a_1 a_4$	$a_1 a_2 a_6$	$a_2 a_3 a_3$	$a_2 a_4 a_5$
5)	$a_1 a_2 a_2$	$a_1 a_3 a_4$	$a_2 a_3 a_4$	$a_2 a_4 a_6$
6)	$a_1 a_2 a_3$	$a_1 a_3 a_5$	$a_2 a_4 a_4$	$a_2 a_5 a_6$
7)	$a_1 a_2 a_4$	$a_1 a_3 a_6$	$a_3 a_3 a_3$	$a_3 a_4 a_5$
8)	$a_1 a_3 a_3$	$a_1 a_4 a_5$	$a_3 a_3 a_4$	$a_3 a_4 a_6$
9)	$a_1 a_3 a_4$	$a_1 a_4 a_6$	$a_3 a_4 a_4$	$a_3 a_5 a_6$
10)	$a_1 a_4 a_4$	$a_1 a_5 a_6$	$a_4 a_4 a_4$	$a_4 a_5 a_6$.

Die Combinationen $m$ter Classe aus n Elementen mit Wiederholung kann man nach den Anfangselementen gruppiren. Mit a_1 fangen so viele an, als sich n Elemente zur $m$ten Classe mit Wiederholung combiniren lassen, also $\overset{w}{C}{}^{(m-1)}_{(n)}$ mit a_2, $\overset{w}{C}{}^{(m-1)}_{(n-1)}$, mit a_3 $\overset{w}{C}{}^{(m-1)}_{(n-2)}$, ... mit a_n $\overset{w}{C}{}^{(m-1)}_{(1)}$ Combinationen. Also ist

$$2)\quad \overset{w}{C}{}^{(m)}_{(n)} = \overset{w}{C}{}^{(m-1)}_{(n)} + \overset{w}{C}{}^{(m-1)}_{(n-1)} + \cdots \overset{w}{C}{}^{(m-1)}_{(1)}.$$

Wendet man hierauf § 23, 3) an, so wird

$$3)\quad (n+m-1)_m = (n+m-2)_{m-1} + (n+m-3)_{m-1} + (n+m-3)_{m-1} + \ldots + (m-1)_{m-1}.$$

Diese wichtige Eigenschaft der Binomial-Coefficienten kann mit Hilfe einiger Beziehungen der letzteren, oder auch durch Betrachtung der figurirten Zahlen abgeleitet werden. Setzt man demnach diese Gleichung als bekannt voraus, so gewinnt man, wie gezeigt, die Beziehung 2) und daraus Formel 3) in § 23. Hierdurch ist also ein dritter Beweis indicirt.

§ 25.

Aufgaben.

1) Bilde alle Combinationen 2ter Classe aus den Elementen x, y, z, u mit Wiederholung.

Antwort:

xx, xy, xz, xu, yy, yz, yu, zz, zu, uu.

2) Bilde die ersten 7 Combinationen 4ter Classe mit Wiederholung aus den Elementen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Antwort: 0, 0, 0, 0; 0, 0, 0, 1; 0, 0, 0, 2; 0, 0, 0, 3; 0, 0, 0, 4; 0, 0, 0, 5; 0, 0, 0, 6.

3) Wie viel Combinationen 4ter Classe mit Wiederholung lassen 10 Elemente zu?

Antwort: 715.

4) Wie viel verschiedene Würfe können mit drei Würfeln geworfen werden?

Antwort: 56.

---

5) Wie viel Elemente geben zur dritten Classe ohne Wiederholung combinirt ebensoviel Complexionen als 7 Elemente mit Wiederholung?

Antwort: 9.

6) Wie viel Elemente geben zur dritten Classe mit Wiederholung combinirt ebensoviel Complexionen als 7 Elemente ohne Wiederholung?

Antwort: 5.

---

7) Die wievielte Combination dritter Classe mit Wiederholung der Ziffern 1, 2, 3, ... 9 ist 5 8 9?

Antwort: Die 144ste.

8) Wie heisst die fünfzehnte Combination dritter Classe mit Wiederholung der Elemente a_1, a_2, a_3, a_4?

Antwort: $a_2\, a_3\, a_4$.

D. Inversionen.

§ 26.

Bildung der Permutationen durch Vertauschung zweier Elemente.

1) Vertauscht man in der Complexion 12, 2 mit 1, so erhält man sämmtliche Permutationen der beiden gegebenen Elemente, nämlich 12 und 21.

2) Sind 1, 2, 3 als Elemente gegeben, so vertauscht man 3 mit 2, dann 2 mit 1; weiter 1 mit 3, ferner 3 mit 2 und 2 mit 1. Man hat so

123;	231;	312;
132;	213;	321.

Eine Vergleichung dieser beiden Permutationbeispiele zeigt, dass man die Permutationen dreier Elemente mit Hilfe der Permutationen von zwei Elementen gewinnt, indem man durch Vertauschung der beiden letzten Elemente die mit 1 anfangenden Permutationen bildet, durch Vertauschung des zuletzt bewegten Elements 2 mit 1 und Anwendung des ersten Beispiels die mit 2 beginnenden Permutationen u. s. f. So bekommt man durch Vertauschung von je zwei Elementen alle Permutationen von drei Elementen.

3) Wie bildet man durch Vertauschung von je zwei Elementen alle Permutationen der Ziffern 1, 2, 3, 4? Man bilde erst alle Permutationen der Ziffern 2, 3, 4 und schreibe vor jede 1. Die letzte so erhaltene Permutation heisst dann 1432. Nun vertauscht man 2 mit 1, wodurch man 2431 erhält, und bildet alle Permutationen von 431 durch Vertauschung von je zwei Elementen; die letzte dieser mit 2 anfangenden Permutationen ist 2134. Jetzt wird 3 mit 2 vertauscht und fortgefahren. Wir wollen dieses Beispiel ausführen:

1234	2431	3124	4321
1243	2413	3142	4312
1342	2314	3241	4213
1324	2341	3214	4231
1423	2143	3412	4132
1432	2134	3421	4|123.

Achtet man auf die Form, welche die Permutation in Bezug auf die erste hat, so kann man die erste und letzte Permutation einer jeden Gruppe der nächst höheren Complexionen hinschreiben, ohne die Zwischenpermutationen zu bilden. So leitet man aus dem vorigen Beispiele die erwähnten Permutationen von fünf Elementen ab; aus diesem diejenigen von sechs Elementen u. s. f. Man hat z. B.

12345; 25134; 34512; 42351; 51234;
. . . . .
. . . . .
. . . . .
15234; 24513; 32451; 41235; 54|123.

Ferner:

123456; 265134; 342651; 415326;
. . . .
. . . .
. . . .
165234; 243651; 315426; 462153;
562143; 634521;
. .
. .
. .
534621; 6|12345.

Für sieben Elemente sind die Gruppen:

1234567; 2713456; 3671245; 4567123;
. . . .
. . . .
. . . .
1723456; 2671345; 3567124; 4356712;
5346712; 6234571; 7123456;
. . .
. . .
. . .
5234671; 6123457; 76|12345.

Es lässt sich nun zeigen, dass die Permutationen von p Elementen durch Vertauschung von je zwei Elementen gebildet werden können, wenn dieses für $p - 1$ Elemente möglich ist. Die Möglichkeit ist für 2, 3, 4 Elemente bewiesen. Daher

gilt der Satz allgemein: **Durch Vertauschung von je zwei Elementen lassen sich alle Permutationen einer gegebenen Complexion ableiten.**

§ 27.

Anzahl der Inversionen.

In der ersten Permutation der gegebenen Elemente pflegen diese in der natürlichen Ordnung hingeschrieben zu werden. Man nennt nun ein Element **höher** als ein anderes, wenn es auf das letztere folgt. Sollte jedoch ein niederes auf ein anderes folgen, so nennt man diese Folge eine **inverse**. Die Summe aller inversen Folgen heisst die **Anzahl der Inversionen**. In *badc* sind *ba* und *dc* die inversen Folgen, ihre Anzahl ist 2. In *cdfaeb* sind die inversen Folgen *ca*, *cb*, *da*, *db*, *fa*, *fe*, *fb*, *eb*; ihre Anzahl ist 8.

Es handelt sich bei den nachfolgenden Untersuchungen nicht darum die wirkliche Anzahl der inversen Folgen zu ermitteln, sondern zu entscheiden, ob in einer Permutation eine gerade oder ungerade Anzahl von Inversionen vorkommt. Diese Entscheidung kann man nun dadurch herbeiführen, dass man die Elemente **zählt**, welche auf je ein höheres folgen und die Summe dieser Zahlen bildet. In dem früher gegebenen Beispiele *cdfaeb* würde sich die Bestimmung so gestalten:

1) Auf *c* folgen 2 niedere Elemente
„ *d* „ 2 „ „
„ *f* „ 3 „ „
„ *a* „ 0 „ „
„ *e* „ 1 „ „

Im Ganzen sind vorhanden acht Inversionen (eine gerade Zahl).

Man kann aber auch jedem Elemente einen Index geben, durch den seine Stelle in der natürlichen Anordnung angezeigt wird, dann jeden Index von jedem folgenden subtrahiren und das Produkt dieser Differenzen bilden. Ist dieses positiv, so ist eine gerade Anzahl von inversen Folgen vorhanden; ist es negativ, eine ungerade. Für das Beispiel $c_3 d_4 f_6 a_1 e_5 b_2$ würde man erhalten:

$$\begin{array}{rrrrr}
(4-3) & (6-3) & (1-3) & (5-3) & (2-3) \times \\
& (6-4) & (1-4) & (5-4) & (2-4) \times \\
& & (1-6) & (5-6) & (2-6) \times \\
& & & (5-1) & (2-1) \times \\
& & & & (2-5).
\end{array}$$

Dieses Produkt ist positiv; also ist die Zahl der Inversionen gerade.

§ 28.

Einfluss der Vertauschung zweier Elemente auf die Inversionen.

Wird zunächst ein Element mit einem benachbarten vertauscht, so ändert sich die Stellung dieser Elemente gegen die übrigen nicht. Es ändert sich daher die Zahl der Inversionen um 1.

Wird aber ein Element mit einem andern vertauscht, so fasse man die nicht bewegten Elemente in beiden Permutationen zusammen. Man erhält

1) $$A, a_\alpha, B, a_\beta, C$$

und

2) $$A, a_\beta, B, a_\alpha, C.$$

Die Stellung der bewegten Elemente a_α und a_β gegen die Gruppen A und C ist in 1) und 2) dieselbe.

Diese beiden Gruppen brauchen demnach nicht berücksichtigt zu werden. Es mag nun a_β ein höheres Element als a_α sein und die Gruppe B aus $x + y + z$ Elementen bestehen, wovon x Elemente niedriger als a_α, y höher als a_α, aber niedriger als a_β, z höher als a_β sind. Dann bildet in 1, a_α mit den x Elementen x Inversionen, mit a_β bildet B z Inversionen. In der Gruppe 1) sind also $x + z$ inverse Folgen, welche von a_α und a_β herrühren. In der Gruppe 2) bildet a_β mit B $x + y$, mit a_α 1 Inversion, B mit a_α $y + z$. Die Permutation 2) hat also $x + 2y + z + 1$ durch a_α und a_β erzeugte Inversionen. Die Differenz der Inversionen der Permutationen 1) und 2) beträgt also $2y + 1$, demnach eine ungerade Zahl. Folglich gilt der Satz allgemein:

Vertauscht man in einer Permutation zwei Ele-

mente, so ändert sich die Anzahl der Inversionen um eine ungerade Zahl.

* Diesen Satz kann man mit Hilfe des Produktes der Indicesdifferenzen beweisen. Es möge hierbei A aus μ, B aus λ, C aus ν Elementen bestehen und das Produkt aller Differenzen, die kein α und β enthalten, durch $\prod (v - w)$ bezeichnet werden. Dann wird das Produkt sämmtlicher Indicesdifferenzen dargestellt durch

$$(\beta-\alpha)\prod (v-w) \prod_{\gamma}^{\mu} (\alpha-\gamma)\cdot \prod_{\gamma}^{\mu} (\beta-\gamma)\cdot \prod_{\delta}^{\lambda} (\delta-\alpha)$$
$$\times \prod_{\varepsilon}^{\nu} (\varepsilon-\alpha)\cdot \prod_{\delta}^{\lambda} (\beta-\delta)\cdot \prod_{\varepsilon}^{\nu} (\varepsilon-\beta).$$

Hierin sollen für γ alle μ Zahlen gesetzt werden, die A enthält u. s. f.

Wird in dem Produkte α mit β vertauscht, so ändert sich

$$\prod (v-w)\cdot \prod_{\gamma}^{\mu} (\alpha-\gamma)\cdot \prod_{\gamma}^{\mu} (\beta-\gamma)\cdot \prod_{\varepsilon}^{\nu} (\varepsilon-\alpha)\cdot \prod_{\varepsilon}^{\nu} (\varepsilon-\beta)$$

nicht. Dieser Theil soll daher kurz mit

$$\prod (\xi - \eta)$$

bezeichnet werden.

Um das Produkt $\prod_{\delta}^{\lambda} (\delta - \alpha)$ mit $\prod_{\delta}^{\lambda} (\beta - \delta)$ conformer zu machen, multipliciren wir mit $+1$ oder -1, je nachdem λ gerade oder ungerade ist, und setzen dabei gleichzeitig für $\delta - \alpha$: $\alpha - \delta$.

Hiermit geht der ganze Ausdruck über in

$$\pm (\beta-\alpha)\prod (\xi-\eta)\cdot \prod_{\delta}^{\lambda} (\alpha-\delta)\cdot \prod_{\delta}^{\lambda} (\beta-\delta) = \Delta.$$

Vertauscht man jetzt α mit β, so ändert nur $\beta - \alpha$ das Zeichen, und es geht Δ über in $-\Delta$. War daher ursprünglich die Zahl der inversen Folgen gerade, so ist sie in der zweiten Permutation ungerade; war sie ursprünglich ungerade, so ist sie in dieser gerade. Die Anzahl der Inversionen hat sich also um eine ungerade Zahl geändert.

§ 29.

Eintheilung der Permutationen.

Ist eine Permutation aus der gegebenen Permutation durch eine gerade Anzahl von Vertauschungen je zweier Elemente gebildet, so kann man sie nur durch eine gerade Anzahl von Vertauschungen aus der gegebenen ableiten. Denn sonst würde ja die Anzahl der Inversionen derselben Permutation gerade und ungerade sein, was absurd ist. Man theilt daher die Permutationen in zwei Classen. In der ersten stehen die Permutationen mit einer geraden Anzahl von inversen Folgen, in der zweiten die mit ungerader.

Nach der ersten Bemerkung können die Permutationen der ersten Classe aus der gegebenen Permutation durch eine gerade und nur durch eine gerade Anzahl von Vertauschungen zweier Elemente abgeleitet werden, die der zweiten Classe durch eine ungerade Anzahl. Die Anzahl der Permutationen von n Elementen, die gegebene mit gerechnet, beträgt $n!$. Hierin kommt der Faktor 2 mindestens einmal vor. $n!$ ist also gerade. Diese Permutationen können abgeleitet werden durch $n! - 1$ Vertauschungen je zweier Elemente. In der zweiten Classe stehen also $\frac{n!}{2!}$ Permutationen. Ebensoviele bleiben für die erste Classe übrig. In beiden Classen sind also gleichviel Permutationen.

* Denkt man sich sämmtliche Permutationen der n gegebenen Elemente gebildet und greift man eine beliebige derselben heraus, so gibt es eine andere die sich nur durch die gegenseitige Stellung der Elemente a_α und a_β von der ersten unterscheidet; vertauscht man in beiden a_α und a_β, so werden diese Permutationen noch einmal erzeugt. Wählt man von den übrig gebliebenen wieder eine Permutation aus, so findet man eine andere, welche sich nur durch die Stellung zweier Elemente, z. B. a_α und a_β, von jener unterscheiden. Vertauscht man in diesen Permutationen a_α mit a_β, so werden beide noch einmal gebildet u. s. f. Wenn man demnach in allen Permutationen a_α und a_β mit einander vertauscht, so werden alle Permutationen wieder gebildet. Aus jeder Per-

mutation mit einer geraden Anzahl von Inversionen wird eine Permutation mit ungerader Anzahl gebildet. Gehören daher bei der ersten x Permutationen zur ersten Klasse, y zur zweiten, so gehören bei der zweiten Bildung y zur ersten Classe, x zur zweiten. Dieses ist nur möglich, wenn $x = y$ ist, wenn also beide Classen gleichviel Permutationen enthalten.

§ 30.

Folgerung.

Sind zwei Permutationen, z. B. $a_3 a_1 a_5 a_4 a_6 a_2$ und $a_4 a_2 a_3 a_6 a_5 a_1$ gegeben, so kann man die zweite aus der ersten ableiten. Man vertauscht zunächst a_3 mit a_4, dann a_2 mit a_1, a_3 mit a_5 u. s. f. Man erhält

$$a_4 a_1 a_5 a_3 a_6 a_2$$
$$a_4 a_2 a_5 a_3 a_6 a_1$$
$$a_4 a_2 a_3 a_5 a_6 a_1$$
$$a_4 a_2 a_3 a_6 a_5 a_1 .$$

Es waren hierbei vier einzelne Vertauschungen erforderlich, demnach gehören die beiden Permutationen zu derselben Klasse.

§ 31.

Aufgaben.

1) Bilde durch Vertauschung von je zwei Elementen die Permutationen von $a_1 a_2 a_3$.

Antwort:

$a_1 a_2 a_3$	$a_2 a_3 a_1$	$a_3 a_1 a_2$
$a_1 a_3 a_2$	$a_2 a_1 a_3$	$a_3 a_2 a_1$.

2) Ebenso von abc.

Antwort:

$a\,b\,c$	$b\,c\,a$	$c\,a\,b$
$a\,c\,b$	$b\,a\,c$	$c\,b\,a$.

3) Ebenso von $a_1 a_2 a_3 a_4$.

Antwort:

$a_1 a_2 a_3 a_4$	$a_1 a_4 a_2 a_3$	$a_2 a_3 a_1 a_4$	$a_3 a_1 a_2 a_4$
$a_1 a_2 a_4 a_3$	$a_1 a_4 a_3 a_2$	$a_2 a_3 a_4 a_1$	$a_3 a_1 a_4 a_2$
$a_1 a_3 a_4 a_2$	$a_2 a_4 a_3 a_1$	$a_2 a_1 a_4 a_3$	$a_3 a_2 a_4 a_1$
$a_1 a_3 a_2 a_4$	$a_2 a_4 a_1 a_3$	$a_2 a_1 a_3 a_4$	$a_3 a_2 a_1 a_4$

u. s. f.

4) Ebenso von $xvzu$.

Antwort:

$x\,v\,z\,u$	$v\,u\,z\,x$	$z\,x\,v\,u$	$u\,z\,v\,x$
$x\,v\,u\,z$	$v\,u\,x\,z$	$z\,x\,u\,v$	$u\,z\,x\,v$
$x\,z\,u\,v$	$v\,z\,x\,u$	$z\,v\,u\,x$	$u\,v\,x\,z$
$x\,z\,v\,u$	$v\,z\,u\,x$	$z\,v\,x\,u$	$u\,v\,z\,x$
$x\,u\,v\,z$	$v\,x\,u\,z$	$z\,u\,x\,v$	$u\,x\,z\,v$
$x\,u\,z\,v$	$v\,x\,z\,u$	$z\,u\,v\,x$	$u\,x\,v\,z$.

5) Welche Inversionen enthält die Complexion $a_7 a_3 a_4 a_5 a_2 a_1$?

Antwort:

$a_7 a_3$, $a_7 a_4$, $a_7 a_5$, $a_7 a_2$, $a_7 a_1$; $a_3 a_2$; $a_3 a_1$;
$a_4 a_2$; $a_4 a_1$; $a_5 a_2$; $a_5 a_1$; $a_2 a_1$.

6) Zu welcher Classe gehört die Permutation $a_5 a_1 a_3 a_2 a_4$?

Antwort: Zur zweiten.

7) Gehören $\xi, \mu, \lambda, \nu, \eta$, und $\lambda \mu \xi \eta \nu$ zu derselben oder zu verschiedenen Classen? Ohne Kenntniss der Rangordnung zu entscheiden.

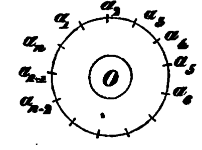
Antwort: Zu derselben.

8) Beweise, dass, wenn man in der Permutation $a_5 a_1 a_3 a_2 a_7 a_4 a_6 a_8 a_9$ a_3 mit a_4 vertauscht, die so erhaltene Permutation zu der anderen Classe gehört. (Nach beiden Methoden.)

E) Cyklische Vertauschungen.

§ 32.

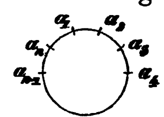
Erklärungen.



Theilt man die Kreislinie O in n gleiche Theile, schreibt an jeden Theilpunkt ein Element, wie sie in der gegebenen Permutation auf einander folgen, dreht dann den Kreis um $\frac{360^0}{n}$ nach links, so geht die Reihenfolge

$$a_1\, a_2\, a_3\, a_4 \ldots a_{n-1}\, a_n$$

über in



$$a_2\, a_3\, a_4\, a_5 \ldots a_{n-1}\, a_n\, a_1 .$$

Hierbei ist jedes Element an die Stelle des vorangehenden gerückt, das erste an die Stelle des letzten. Diese Vertauschung heisst eine cyklische.

Die cyklische Vertauschung kann mit jeder Permutation vorgenommen werden, z. B. geht

$$a_7\, a_3\, a_5\, a_1\, a_n\, a_2\, a_{n-5} \ldots a_8$$

über in

$$a_3\, a_5\, a_1\, a_n\, a_2\, a_{n-5} \ldots a_8\, a_7\,.$$

Eine Gruppe der Elemente einer Permutation kann ebenfalls cyklisch vertauscht werden; z. B.

$$\begin{array}{l|l} a_5\, a_7 & a_2\, a_6\, a_3\, a_4\, a_1 \\ a_5\, a_7 & a_6\, a_3\, a_4\, a_1\, a_2\,. \end{array}$$

§ 33.

Jedes Element an jede Stelle zu bringen.

Vertauscht man die n Elemente einer Permutation 1 Mal cyklisch, so nimmt das Element in der μten Stelle die $(\mu - 1)$te Stelle ein, nach 2 cyklischen Vertauschungen die $(\mu - 2)$te, nach 3 Vertauschungen die $(\mu - 3)$te, nach $(\mu - 1)$ die erste, nach μ die $n$te, nach $(\mu + 1)$ die $(n - 1)$te, nach $(\mu + 2)$ die $(n - 2)$te, nach $(n - 1)$ cyklischen Vertauschungen nimmt also dieses Element die $(\mu + 1)$te Stelle ein und hat sich an jeder Stelle befunden. Dasselbe gilt natürlich allgemein von jedem Elemente. Hieraus ergibt sich der Satz:

Vertauscht man eine Permutation aus n Elementen $(n - 1)$mal cyklisch, so hat jedes Element jede Stelle eingenommen.

Da das Element, welches in der gegebenen Permutation die erste Stelle hat, in der letzten die zweite einnimmt, da ferner das zweite an die dritte, das dritte an die vierte, ... das $n$te Element an die erste Stelle gekommen ist, so erhält man durch eine nochmalige cyklische Vertauschung die gegebene Permutation wieder.

Vertauscht man also eine Permutation aus n Elementen $n$mal cyklisch, so erhält man die gegebene.

§ 34.

Cyklische Vertauschungen und Vertauschungen je zweier Elemente.

Aus einer Permutation kann man die durch cyklische Vertauschung aus ihr hervorgegangene vermittelst der Vertauschungen von je zwei Elementen herleiten. Wie viel Vertauschungen sind dazu erforderlich? Man vertausche erst das erste Element mit dem zweiten, dann das erste mit dem dritten, dann mit dem vierten, ... schliesslich mit dem $n$ten Element. Also nimmt das erste Element nach der ersten Vertauschung die zweite Stelle ein, nach der zweiten die dritte, nach der dritten die vierte, ... nach der $(n-1)$ten die $n$te. Bei n Elementen sind also $(n-1)$ Vertauschungen je zweier Elemente nothwendig, um eine cyklische Vertauschung zu erzeugen.

§ 35.

Cyklische Vertauschung und Classen.

Hat die gegebene Permutation n Elemente, so sind $(n-1)$ Vertauschungen von je zwei Elementen erforderlich, um die durch eine cyklische Vertauschung entstandene Permutation aus der ersten abzuleiten. Bei jeder Vertauschung von je zwei Elementen ändert sich die Anzahl der inversen Folgen um eine ungerade Zahl. Ist nun n gerade, so ist $(n-1)$ ungerade, und umgekehrt. Daher gehören eine Permutation und die durch eine cyklische Vertauschung aus ihr abgeleitete zu derselben oder zu verschiedenen Classen, je nachdem n ungerade oder gerade ist.

§ 36.

Ableitung einer Permutation durch cyklische Vertauschungen.

Es sei die Permutation $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6$ gegeben und hieraus eine andere $a_3 a_5 a_1 a_4 a_6 a_2$ abzuleiten. a_3 bringt man dadurch an die erste Stelle, dass man die 6 gegebenen Elemente zweimal cyklisch vertauscht. Man erhält

$$a_3 \mid a_4 a_5 a_6 a_1 a_2 .$$

Vertauscht man diese Elemente mit Ausnahme des ersten 1 Mal, so kommt

$$a_3 a_5 \mid a_6 a_1 a_2 a_4 .$$

a_1 wird durch eine Vertauschung der 4 letzten Elemente an die Stelle von a_6 gebracht

$$a_3 a_5 a_1 \mid a_2 a_4 a_6 ;$$

durch eine einmalige cyklische Vertauschung der 3 letzten Elemente ergibt sich

$$a_3 a_5 a_1 a_4 a_6 a_2 ;$$

also die gesuchte Permutation.

Dieses Verfahren wird leicht auf eine Permutation aus n Elementen ausgedehnt, so dass der Satz ausgesprochen werden kann: **Jede Permutation lässt sich aus einer gegebenen durch cyklische Vertauschung verschiedener Gruppen ableiten.**

Anmerkung. Häufig wird der Begriff der cyklischen Vertauschungen allgemeiner gefasst. Würde man ersetzen 8 durch 5, 5 durch 3, 3 durch 7, 7 durch 8, ohne Rücksicht auf die Anordnung in der Permutation, so wäre diese Vertauschung schon eine cyklische. Für unsern Satz und unser Beispiel würde sich das Verfahren so gestalten: Man vertausche a_1 durch a_3, a_3 durch a_1. Hiermit ist eine cyklische Vertauschung vollendet. Dann vertausche man a_2 mit a_5, a_5 mit a_6, a_6 mit a_2. Hier sind wir zu a_2 gelangt und die Gruppe ist fertig. a_4 steht für sich da. Wir werden im Folgenden unsere engere Definition festhalten.

§ 37.

Bildung aller Permutationen durch cyklische Vertauschungen.

Wir wollen von dem Beispiele $a_1 a_2 a_3 a_4$ ausgehen. Hieraus sollen alle Permutationen durch cyklische Vertauschungen abgeleitet werden.

Wir suchen zuerst die Frage zu beantworten: Wie wird eine bestimmte Permutation, z. B. $a_3 a_2 a_1 a_4$, abgeleitet? Vertauschen wir alle Elemente 2 Mal cyklisch, so erhalten wir $a_1 a_4 a_3 a_2$, eine mit a_1 anfangende Permutation. Aus dieser Permutation wird durch zweimalige cyklische Vertauschung wieder $a_3 a_2 a_1 a_4$. Wir können also die beliebig ausgewählte

Permutation $a_3 a_2 a_1 a_4$ aus einer mit a_1 anfangenden Permutation $a_1 a_4 a_3 a_2$ durch cyklische Vertauschungen ableiten.

Man überzeugt sich leicht davon, dass $a_3 a_2 a_1 a_4$ aus anderen mit a_1 anfangenden Permutationen nicht entstehen kann.

Was nun von dieser Permutation, $a_3 a_2 a_1 a_4$, gilt, muss von jeder gelten. Man kann daher alle Permutationen aus den mit a_1 anfangenden durch cyklische Vertauschung aller Elemente ableiten.

Die Lösung der Aufgabe ist also darauf zurückgeführt, alle mit a_1 anfangenden Permutationen durch cyklische Vertauschungen zu bilden. Durch eine der vorigen ähnliche Betrachtung findet man, dass alle mit a_2 anfangenden Permutationen der Elemente $a_2 a_3 a_4$ cyklisch zu vertauschen sind: die mit a_2 beginnenden Permutationen der Elemente werden durch cyklische Vertauschung der Elemente $a_3 a_4$ gebildet.

Die Ableitung der Permutationen ist nun folgende: Man vertausche $a_3 a_4$ cyklisch, schreibe vor jede Complexion a_2, vertausche jede der beiden Complexionen aus 3 Elementen so oft als nöthig cyklisch u. s. f.

Man hat

$$\begin{array}{llll}
a_1\, a_2 \mid a_3\, a_4\,; & a_2\, a_3\, a_4\, a_1\,; & a_3\, a_4\, a_1\, a_2\,; & a_4\, a_1\, a_2\, a_3\,; \\
a_1\, a_2 \mid a_4\, a_3\,; & a_2\, a_4\, a_3\, a_1\,; & a_4\, a_3\, a_1\, a_2\,; & a_3\, a_1\, a_2\, a_4\,; \\
a_1 \mid a_3\, a_4\, a_2\,; & a_3\, a_4\, a_2\, a_1\,; & a_4\, a_2\, a_1\, a_3\,; & a_2\, a_1\, a_3\, a_4\,; \\
a_1 \mid a_4\, a_2\, a_3\,; & a_4\, a_2\, a_3\, a_1\,; & a_2\, a_3\, a_1\, a_4\,; & a_3\, a_1\, a_4\, a_2\,; \\
a_1 \mid a_4\, a_3\, a_2\,; & a_4\, a_3\, a_2\, a_1\,; & a_3\, a_2\, a_1\, a_4\,; & a_2\, a_1\, a_4\, a_3\,; \\
a_1 \mid a_3\, a_2\, a_4\,; & a_3\, a_2\, a_4\, a_1\,; & a_2\, a_4\, a_1\, a_3\,; & a_4\, a_1\, a_3\, a_4\,.
\end{array}$$

Dieses Beispiel lässt sich leicht verallgemeinern, so dass dieselbe Methode bei n Elementen angewandt werden kann.

§ 38.

Folgerung.

Durch eine cyklische Vertauschung von $a_{n-1} a_n$ erhält man 2 Permutationen. Vor jede setzt man a_{n-2}, und vertauscht dann jede 2 zweimal cyklisch. So erhält man

$$2 + 2 \cdot 2 = 2 \cdot 3$$

Permutationen. Vor jede setzt man a_{n-3} und vertauscht 3 Mal cyklisch. Man bekommt

$$2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 3 = 2 \cdot 3 \cdot 4$$

Permutationen. Vor jede setzt man a_{n-4} und vertauscht cyklisch, wodurch

$$2 \cdot 3 \cdot 4 + 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$$

Permutationen entstehen. Fährt man fort bis a_1 incl., so bekommt man

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot\cdot (n-1) + (n-1)\, 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n-1)$$
$$= 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n-1)\, n = n! \text{ Permutationen.}$$

Man kann demnach auf diese Weise die Anzahl der Permutationen ableiten.

§ 39.

Aufgaben.

1) Bilde sämmtliche cyklische Vertauschungen der Elemente *xauvw*.

Antwort:

auvwx; *uvwxa*; *vwxau*; *wxauv*.

2) Wie viel verschiedene Permutationen kann man durch cyklische Vertauschungen aller Elemente der Permutation *bild* ableiten?

Antwort: 3.

3) Wie viel cyklische Vertauschungen sind erforderlich, um jedes Element der Complexion 38745932 an jede Stelle zu bringen?

Antwort: 7.

4) Welche Complexion entsteht, wenn man in $a_5 a_3 a_2 a_7 a_4 a_1 a_6$ die Gruppe $a_2 a_7 a_4 a_1$ cyklisch vertauscht?

Antwort: $a_5 a_3 a_7 a_4 a_1 a_2 a_6$.

5) Bilde durch cyklische Vertauschungen alle Permutationen von *lied*.

Antwort:

lied;	*iedl*;	*edli*;	*dlie*;
lide;	*idel*;	*deli*;	*elid*;
ledi;	*edil*;	*dile*;	*iled*;
ldie;	*diel*;	*ield*;	*eldi*;
ldei;	*deil*;	*eild*;	*ilde*;
leid;	*eidl*;	*idle*;	*dlei*.

6) Leite durch cyklische Vertauschungen aus 12345678 die Permutation 57213486 ab.

Antwort:

56781234	durch	4	Vert.	aller	Elemente,
5|7812346	„	1	„	7	„
57|234681	„	2	„	6	„
572|13468	„	4	„	5	„
572134|86	„	1	„	1	„

Zweiter Abschnitt.

Determinanten.

§ 40.

Erklärungen.

Wir leiten den Begriff der Determinante aus dem der Permutationen ab und wollen von einem Beispiele ausgehen. Es seien 3 Elemente $a_1 a_2 a_3$ gegeben. Wir bilden alle Permutationen dieser Elemente $a_1 a_2 a_3$, $a_1 a_3 a_2$, $a_2 a_1 a_3$, $a_2 a_3 a_1$, $a_3 a_1 a_2$, $a_3 a_2 a_1$. Jetzt fügen wir Stellenindices hinzu. Hierdurch erhalten wir

$$a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3}\,; \quad a_{1,1}\, a_{3,2}\, a_{2,3}\,; \quad a_{2,1}\, a_{1,2}\, a_{3,3}\,;$$
$$a_{2,1}\, a_{3,2}\, a_{1,3}\,; \quad a_{3,1}\, a_{1,2}\, a_{2,3}\,; \quad a_{3,1}\, a_{2,2}\, a_{1,2}\,.$$

Aus den 3 gegebenen Elementen sind demnach 9 entstanden; betrachten wir diese jetzt als ebensoviele (im all-

gemeinen verschiedene) Zahlengrössen und jede Complexion als ein Produkt, so müssen wir noch die Vorzeichen bestimmen. Zu diesem Zwecke geben wir jedem Produkte das positive oder negative Vorzeichen, je nachdem die Anzahl der inversen Folgen der ersten Indices eine gerade oder ungerade ist. Schliesslich führen wir die algebraische Addition aus. Hierdurch erhalten wir:

$$+ a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3} - a_{1,1}\, a_{3,2}\, a_{2,3} - a_{2,1}\, a_{1,2}\, a_{3,3} + a_{2,1}\, a_{3,2}\, a_{1,3}$$
$$+ a_{3,1}\, a_{1,2}\, a_{2,3} - a_{3,1}\, a_{2,2}\, a_{1,3}\,.$$

Diese algebraische Summe heisst die Determinante der 3^2 Elemente. Die gebräuchlichsten abgekürzten Bezeichnungen derselben sind

$$1)\ \sum \pm a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3}\,;\quad 2) \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{3,2} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} \end{vmatrix};\quad 3) \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,2\,3 \end{pmatrix};$$

$+ a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3}$ ist das Anfangsglied der Determinante. Aus der Bezeichnung 2) folgt, dass dasselbe auch die Diagonalreihe des Quadrats der Elemente genannt werden kann. Ferner geben die ersten Indices die Verticalreihen, die zweiten die Horizontalreihen an.

Auf dieselbe Weise wird die Determinante aus n^2 Elementen aus $a_1 a_2 a_3 a_4 \cdots a_n$ erhalten. Man stellt sie dar durch

$$1)\ \sum \pm a_{11}\, a_{22}\, a_{33} \cdots a_{nn}\,;\ 2) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \cdots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \cdots & a_{n3} \\ & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \cdots n \\ 1\,2\,3 \cdots n \end{pmatrix}.$$

Beispiele:

$$1)\qquad \sum \pm a_{11}\, a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12}\,.$$

$$2)\ \sum \pm a_{11}\, a_{22}\, a_{33}\, a_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22}\, a_{33}\, a_{44}$$

$$
\begin{aligned}
& - a_{11} a_{22} a_{43} a_{34} - a_{11} a_{32} a_{23} a_{44} + a_{11} a_{32} a_{43} a_{24} \\
& + a_{11} a_{42} a_{23} a_{34} - a_{11} a_{42} a_{33} a_{24} - a_{21} a_{12} a_{33} a_{44} \\
& + a_{21} a_{12} a_{43} a_{34} + a_{21} a_{32} a_{13} a_{44} - a_{21} a_{32} a_{43} a_{14} \\
& - a_{21} a_{42} a_{13} a_{34} + a_{21} a_{42} a_{33} a_{14} + a_{31} a_{12} a_{23} a_{44} \\
& - a_{31} a_{12} a_{43} a_{24} - a_{31} a_{22} a_{13} a_{44} + a_{31} a_{22} a_{43} a_{14} \\
& + a_{31} a_{42} a_{13} a_{24} - a_{31} a_{42} a_{23} a_{14} - a_{41} a_{12} a_{23} a_{34} \\
& + a_{41} a_{12} a_{33} a_{24} + a_{41} a_{22} a_{13} a_{34} - a_{41} a_{22} a_{33} a_{14} \\
& - a_{41} a_{32} a_{13} a_{24} + a_{41} a_{32} a_{23} a_{14}.
\end{aligned}
$$

§ 41.

Folgerungen.

1) Das aus der Diagonalreihe gebildete Glied ist stets positiv, da die Anzahl der inversen Folgen der ersten Indices 0 ist.

2) Die zweiten Indices geben nur die Stellung des Elementes in der Permutation an; sie folgen also in der natürlichen Ordnung $1, 2, 3 \cdots n$ in jedem Gliede auf einander. Demnach bildet man sämmtliche Glieder aus dem Anfangsgliede (Diagonalreihe) durch Permutation der ersten Indices.

3) Die Anzahl der Glieder einer Determinante aus n^2 Elementen ist $P(n) = n!$. Unter diesen Gliedern sind ebensoviele positive als negative, weil die Anzahl der Permutationen mit einer geraden Anzahl von inversen Folgen gleich der Anzahl derjenigen mit einer ungeraden Anzahl ist.

4) Bildet man die Permutationen der ersten Indices durch Vertauschung von je zwei Elementen, so sind die Vorzeichen der Glieder abwechselnd positiv und negativ.

5) Jedes Glied der entwickelten Determinante enthält die zweiten Indices in der natürlichen Reihenfolge $1, 2, 3 \cdots n$ und zwar alle. Diese Indices geben die Horizontalreihen an. Es enthält daher jedes Glied *ein* Element und *nur ein* Element aus jeder Horizontalreihe. Geordnet sind die Elemente in jedem Gliede nach diesen Reihen.

Die ersten Indices der Elemente jedes Gliedes bilden eine Permutation der Zahlen $1, 2, 3 \cdots n$ ohne Wiederholung. Diese Indices geben die Vertikalreihen an, in welchen sich die Elemente befinden. Demnach enthält jedes Glied *ein* Element und *nur ein* Element aus jeder Vertikalreihe.

6) Wählt man umgekehrt aus jeder Horizontal- und Vertikalreihe ein Element, ordnet man diese Elemente nach den Horizontalreihen und gibt man dem Produkte das positive oder negative Vorzeichen, je nachdem die, die Vertikalreihen anzeigenden, Indices eine gerade oder ungerade Anzahl inverser Folgen besitzen, so ist das Produkt ein Glied der Determinante. Die Horizontalreihen werden nämlich durch die zweiten Indices angezeigt. Aus jeder Reihe ist ein Element genommen und diese sind nach diesen Zeilen geordnet. Also folgen in dem gebildeten Gliede die zweiten Indices in der natürlichen Ordnung $1, 2, 3 \cdots n$ auf einander. Aus jeder Vertikalreihe ist auch ein Element genommen. Die ersten Indices bilden demnach eine Permutation der Zahlen $1, 2, 3 \cdots n$. Da nun schliesslich das Vorzeichen nach den inversen Folgen dieser Indices bestimmt ist, so ist der Satz bewiesen.

Hieraus geht nun hervor, dass man die angegebene Definition der Determinante durch diese Bildungsweise ersetzen kann.

§ 42.

Bildung der Determinanten durch Permutation der zweiten Indices.

Permutirt man in dem Beispiele $\Sigma \pm a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}$ nicht die ersten sondern die zweiten Indices, so heisst ein Glied der Entwickelung z. B. $a_{14} a_{23} a_{31} a_{42}$. Die ersten Indices stehen darin in der natürlichen Ordnung. Es ist also aus jeder Vertikalreihe ein Element genommen. Die zweiten Indices bilden eine Permutation der Zahlen 1 2 3 4; demnach enthält jenes Glied auch aus jeder Horizontalreihe ein Element. Das Glied $a_{14} a_{23} a_{31} a_{42}$ ist also ein Glied der Determinante, wenn das Vorzeichen richtig bestimmt werden kann. Das entsprechende Glied in der früheren Entwickelung ist $a_{31} a_{42} a_{23} a_{14}$, worin sich das Zeichen nach der Anzahl der inversen Folgen der ersten Indices richtet. Die Bestimmung desselben kann so vorgenommen werden: Wir verwandeln durch Vertauschung je zweier Elemente die Complexion so lange, bis die ersten Indices in der natürlichen Ordnung auf einander folgen. Ist die Anzahl dieser Ver-

tauschungen gerade, so gilt das Vorzeichen $+$, ist sie ungerade, $-$, da hierzu offenbar ebensoviel Vertauschungen nöthig sind, als die Verwandlung von 1234 in 3421 erfordert.

Durch die vorgenommenen Vertauschungen der Elemente werden gleichzeitig die zweiten Indices 1234 in 4312 übergeführt. Es kann demnach das Vorzeichen nach der Anzahl der inversen Folgen der zweiten Indices festgesetzt werden. Also stimmen die Glieder auch mit den Vorzeichen überein.

Hieraus ergibt sich der Satz: Aus dem Anfangsgliede lässt sich die Determinante durch Permutation der zweiten Indices herleiten. Folgen hierbei die ersten Indices in der natürlichen Ordnung auf einander, so ist jedes Glied positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem die Anzahl der inversen Folgen der zweiten Indices gerade oder ungerade ist.

§ 43.

Vergleichung zweier Determinanten.

Es soll eine Determinante mit einer zweiten dieselben Elemente haben. Dabei mögen aber die Elemente der Horizontalreihen der zweiten mit den Elementen der Vertikalreihen der ersten übereinstimmen. Es sei also

$$\varDelta_1 = \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{21} \cdots a_{n1} \\ a_{12}\, a_{22} \cdots a_{n2} \\ a_{13}\, a_{23} \cdots a_{n3} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{1n}\, a_{2n} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}; \quad \varDelta_2 = \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \cdots a_{2n} \\ a_{31}\, a_{32} \cdots a_{3n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n1}\, a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

$\varDelta_1$ und $\varDelta_2$ entwickeln wir dadurch, dass wir aus jeder Horizontal- und jeder Vertikalreihe ein Element zu jedem Gliede wählen. Dabei wollen wir in den Gliedern von $\varDelta_1$ die Elemente nach den Horizontalreihen ordnen. So erhält man

$$\varDelta_1 = \Sigma \pm a_{11}\, a_{22} \cdots a_{nn},$$

wo die ersten Indices zu permutiren sind.

In den Gliedern der Determinante $\varDelta_2$ ordnen wir die

Elemente nach den Vertikalreihen. Diese werden durch die zweiten Indices angegeben. Es ergibt sich demnach

$$\Delta_2 = \Sigma \pm a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

und es sind ebenfalls die ersten Indices zu permutiren. Nothwendig muss also

$$\Delta_1 = \Delta_2$$

sein.

Man kann demnach die Vertikalreihen durch die ersten oder durch die zweiten Indices andeuten.

§ 44.

Aufgaben.

1) Entwickele

$$\begin{vmatrix} a\, b \\ a_1 b_1 \end{vmatrix}.$$

Antwort: $a b_1 - a_1 b.$

2) Ebenso

$$\begin{vmatrix} a\, b\, c \\ a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \end{vmatrix}$$

durch Vertauschung je zweier Elemente.

Antwort: $a b_1 c_2 - a b_2 c_1 + a_1 b_2 c - a_1 b c_2 + a_2 b c_1 - a_2 b_1 c$.

3) Ebenso

$$\begin{vmatrix} 321 \\ 567 \\ 214 \end{vmatrix}.$$

Antwort: $3 \cdot 6 \cdot 4 - 3 \cdot 7 \cdot 1 + 5 \cdot 1 \cdot 1 - 5 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot 7 - 2 \cdot 6 \cdot 1 = 32.$

4) Wie gross ist:

$$\begin{vmatrix} 2, & -1, & -1, \\ -3, & -2, & 2, \\ 2, & 0, & 1, \end{vmatrix} ?$$

Antwort: $-15.$

Anmerkung. Man benutze die Tabellen § 26 und denke Indices.

5) Entwickele

$$\begin{vmatrix} 2, & 3, & -1, & +5 \\ 0, & 6, & -5, & 3 \\ 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & -1, & 1, & -1 \end{vmatrix}$$

durch Vertauschung je zweier Elemente.

Antwort: $2\cdot6\cdot1\,(-1)-2\cdot6\cdot(+1)\cdot1+2\cdot(-5)\cdot1\cdot(-1)$
$-2\,(-5)\,(1)\,(-1)\cdot+2\cdot(-3)\,1\cdot1-2\,(-3)\cdot1\cdot(-1)$
$+3\,(-3)\,1\cdot1-3\,(-3)\,1\cdot1+3\,(-5)\,1\cdot(-1)-3(-5)\,1\cdot1$
$+3\cdot0\cdot1\cdot1-3\cdot0\cdot1(-1)+(-1)\cdot0\cdot1\cdot(-1)-(-1)\cdot0\cdot1\cdot(-1)$
$+(-1)\cdot6\cdot1\cdot1-(-1)\cdot6\cdot1\cdot(-1)+(-1)(-3)\,1\,(-1)$
$-(-1)(-3)\,1\cdot1+5(-5)\,1\cdot1-5(-5)\,1(-1)+5\cdot6\cdot1\cdot1$
$-5\cdot6\cdot1\cdot1+5\cdot0\cdot1\cdot(-1)-5\cdot0\cdot1\cdot1=-74.$

6) Entwickele

$$\begin{vmatrix} x_1, y_1, 1 \\ x_2, y_2, 1 \\ x_3, y_3, 1 \end{vmatrix}.$$

Antwort: $x_1y_2-x_1y_3+x_2y_3-x_2y_1+x_3y_1-x_3y_2=x_1\,(y_2-y_3)$
$+x_2\,(y_3-y_1)+x_3\,(y_1-y_2).$

Anmerkung. Achte auf die cyklische Vertauschung der Indices.

7) Entwickele

$$\begin{vmatrix} x_1^2, & 2\,x_1\,x_2, & x_2^2 \\ \alpha_1\,\alpha_2, & \alpha_1+\alpha_2, & 1 \\ \beta_1\,\beta_2, & \beta_1+\beta_2, & 1 \end{vmatrix}$$

nach fallenden Potenzen von x_1 und nach steigenden von x_2.

Antwort: $x_1^2\,[(\alpha_1+\alpha_2)-(\beta_1+\beta_2)]+2\,x_1\,x_2\,[\beta_1\,\beta_2-\alpha_1\,\alpha_2]$
$+x_2^2\,[(\beta_1+\beta_2)\,\alpha_1\,\alpha_2-(\alpha_1+\alpha_2)\,\beta_1\,\beta_2].$

8) Welchen Werth hat

$$\begin{vmatrix} \lambda, & 1 \\ \lambda\cos\alpha-\sin\alpha, & \lambda\sin\alpha+\cos\alpha \end{vmatrix}?$$

Antwort: $(\lambda^2+1)\sin\alpha.$

9) Entwickele

$$\begin{vmatrix} a\,b\,e \\ b\,c\,f \\ e\,f\,g \end{vmatrix}.$$

Elemente nach den Vertikalreihen. Diese werden durch die zweiten Indices angegeben. Es ergibt sich demnach

$$\Delta_2 = \Sigma \pm a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

und es sind ebenfalls die ersten Indices zu permutiren. Nothwendig muss also

$$\Delta_1 = \Delta_2$$

sein.

Man kann demnach die Vertikalreihen durch die ersten oder durch die zweiten Indices andeuten.

§ 44.

Aufgaben.

1) Entwickele

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}.$$

Antwort: $a b_1 - a_1 b.$

2) Ebenso

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

durch Vertauschung je zweier Elemente.

Antwort: $a b_1 c_2 - a b_2 c_1 + a_1 b_2 c - a_1 b c_2 + a_2 b c_1 - a_2 b_1 c$.

3) Ebenso

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Antwort: $3 \cdot 6 \cdot 4 - 3 \cdot 7 \cdot 1 + 5 \cdot 1 \cdot 1 - 5 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot 7 - 2 \cdot 6 \cdot 1 = 32.$

4) Wie gross ist:

$$\begin{vmatrix} 2, & -1, & -1, \\ -3, & -2, & 2, \\ 2, & 0, & 1, \end{vmatrix} ?$$

Antwort: $-15.$

Anmerkung. Man benutze die Tabellen § 26 und denke Indices.

5) Entwickele

$$\begin{vmatrix} 2, & 3, & -1, & +5 \\ 0, & 6, & -5, & 3 \\ 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & -1, & 1, & -1 \end{vmatrix}$$

durch Vertauschung je zweier Elemente.

Antwort: $2 \cdot 6 \cdot 1\,(-1) - 2 \cdot 6 \cdot (+1) \cdot 1 + 2 \cdot (-5) \cdot 1 \cdot (-1)$
$- 2\,(-5)\,(1)\,(-1) \cdot + 2 \cdot (-3)\,1 \cdot 1 - 2\,(-3) \cdot 1 \cdot (-1)$
$+ 3\,(-3)\,1 \cdot 1 - 3\,(-3)\,1 \cdot 1 + 3\,(-5)\,1 \cdot (-1) - 3(-5)\,1 \cdot 1$
$+ 3 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot 0 \cdot 1\,(-1) + (-1) \cdot 0 \cdot 1 \cdot (-1) - (-1) \cdot 0 \cdot 1 \cdot (-1)$
$+ (-1) \cdot 6 \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 6 \cdot 1 \cdot (-1) + (-1)\,(-3)\,1\,(-1)$
$- (-1)(-3)\,1 \cdot 1 + 5(-5)\,1 \cdot 1 - 5(-5)\,1(-1) + 5 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 1$
$- 5 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 1 + 5 \cdot 0 \cdot 1 \cdot (-1) - 5 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 1 = -74.$

6) Entwickele

$$\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix}.$$

Antwort: $x_1 y_2 - x_1 y_3 + x_2 y_3 - x_2 y_1 + x_3 y_1 - x_3 y_2 = x_1\,(y_2 - y_3)$
$+ x_2\,(y_3 - y_1) + x_3\,(y_1 - y_2).$

Anmerkung. Achte auf die cyklische Vertauschung der Indices.

7) Entwickele

$$\begin{vmatrix} x_1^2, & 2\,x_1\,x_2, & x_2^2 \\ \alpha_1\,\alpha_2, & \alpha_1 + \alpha_2, & 1 \\ \beta_1\,\beta_2, & \beta_1 + \beta_2, & 1 \end{vmatrix}$$

nach fallenden Potenzen von x_1 und nach steigenden von x_2.

Antwort: $x_1^2\,[(\alpha_1 + \alpha_2) - (\beta_1 + \beta_2)] + 2\,x_1\,x_2\,[\beta_1\,\beta_2 - \alpha_1\,\alpha_2]$
$+ x_2^2\,[(\beta_1 + \beta_2)\,\alpha_1\,\alpha_2 - (\alpha_1 + \alpha_2)\,\beta_1\,\beta_2].$

8) Welchen Werth hat

$$\begin{vmatrix} \lambda, & 1 \\ \lambda \cos\alpha - \sin\alpha, & \lambda \sin\alpha + \cos\alpha \end{vmatrix} ?$$

Antwort: $(\lambda^2 + 1)\sin\alpha.$

9) Entwickele

$$\begin{vmatrix} a & b & e \\ b & c & f \\ e & f & g \end{vmatrix}.$$

Antwort: $acg - af^2 - ce^2 - gb^2 + 2\,efb$.

Anmerkung. Achte auf die Uebereinstimmung der Horizontal- und Vertikalreihen.

10) Wie viel Glieder hat die Determinante

$$\Sigma \pm x_1\, y_2\, z_3\, u_4\, v_5\, w_6\, t_7 ?$$

Antwort: 5040.

11) Welches Vorzeichen hat das Glied

$$x_4\, y_7\, z_2\, u_5\, v_1\, w_3\, t_6 ?$$

Antwort: Das negative.

§ 45.

Vertauschung paralleler Reihen.

Stellen wir die Determinante aus n^2 Elementen dar durch

$$\varDelta_1 = \begin{vmatrix} a_1\, b_1\, c_1\, d_1\, e_1\, f_1\, g_1\, h_1 \cdots x_1 \\ a_2\, b_2\, c_2\, d_2\, e_2\, f_2\, g_2\, h_2 \cdots x_2 \\ \cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot \\ a_n\, b_n\, c_n\, d_n\, e_n\, f_n\, g_n\, h_n \cdots x_n \end{vmatrix},$$

so sind die ersten Indices durch die Buchstaben $a, b, c \cdots x$ ersetzt, während $1, 2, \cdots n$ den zweiten Indices entsprechen. Nach § 42 heisst irgend ein Glied der Determinante

$$G = a_\alpha\, b_\beta\, c_\gamma\, d_\delta\, e_\varepsilon\, f_\zeta\, g_\eta\, h_\vartheta \cdots x_\nu,$$

wo $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta\vartheta \cdots \nu$ eine Permutation von $1, 2 \cdots n$ ist. Das Vorzeichen dieses Gliedes ist positiv oder negativ, je nachdem die Anzahl der inversen Folgen dieser Permutation gerade oder ungerade ist.

Vertauschen wir nun in $\varDelta_1$ die Vertikalreihe g mit der Vertikalreihe c, so mag $\varDelta_1$ in $\varDelta_2$ übergehen. Welchen Werth hat $\varDelta_2$? Da die Glieder in $\varDelta_2$ (wie in $\varDelta_1$) dadurch gebildet werden, dass man aus jeder Vertikal- und Horizontalreihe ein Element nimmt, so stimmen dieselben dem absoluten Werthe nach in beiden Determinanten überein. So entspricht z. B. dem von uns betrachteten Gliede das Glied

$$G' = a_\alpha\, b_\beta\, g_\eta\, d_\delta\, e_\varepsilon\, f_\zeta\, c_\gamma\, h_\vartheta \cdots x_\nu.$$

Das Vorzeichen dieses Gliedes G' richtet sich nach der Zahl der inversen Folgen der Indices. Nun entsteht $\alpha\beta\eta\delta\varepsilon\zeta\gamma\vartheta\cdots\nu$ aus $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta\vartheta\cdots\nu$ durch Vertauschung von η mit γ. Ist demnach die Anzahl der inversen Folgen in $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta\vartheta\cdots\nu$ gerade, so ist sie in $\alpha\beta\eta\delta\varepsilon\zeta\gamma\vartheta\cdots\nu$ ungerade und umgekehrt. Die Glieder G und G' haben also entgegengesetzte Vorzeichen. Da dasselbe von allen Gliedern gilt, so ist

$$\Delta_1 = -\Delta_2 .$$

Demnach ändert die Determinante nur ihr Vorzeichen, wenn in ihr zwei Vertikalreihen vertauscht werden.

Ebenso wird der Beweis für Horizontalreihen geführt.

§ 46.

Cyklische Vertauschung paralleler Reihen.

Nach § 34 sind zur Herstellung einer cyklischen Vertauschung von n Elementen $(n - 1)$ Vertauschungen zweier Elemente nothwendig. Ersetzen wir Element durch Reihe, so erhalten wir mit Berücksichtigung von § 45 den Satz: Durch eine cyklische Vertauschnng der Horizontal- oder der Vertikalreihen erhält eine Determinante den entgegengesetzten Werth oder bleibt ungeändert, je nachdem der Grad der Determinante gerade oder ungerade ist. Es ist nämlich

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & \cdots & a_{n3} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & \cdots & a_{n3} \\ a_1 & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & & a_{nn} \\ a_{11} & a_{21} & & a_{n1} \end{vmatrix} .$$

Wie das Vorzeichen zu bestimmen ist, wenn nur eine Gruppe von parallelen Reihen cyklisch vertauscht werden soll, ergibt sich von selbst.

Sollen in Δ_1 die Vertikalreihen so lange cyklisch vertauscht werden, bis die Reihenfolge die umgekehrte geworden ist, so vertausche man alle Vertikalreihen so lange cyklisch,

bis die letzte Reihe die erste Stelle einnimmt. Hierdurch ist $\varDelta_1$ in $\varDelta_2$ übergegangen, wo

$$\varDelta_1 = (-1)^{(n-1)^2} \varDelta_2$$

ist, da nach § 33 $(n-1)$ cyklische Vertauschungen hierzu erforderlich sind.

In $\varDelta_2$ vertauscht man die $(n-1)$ letzten Vertikalreihen so lange cyklisch, bis die $(n-1)$te in $\varDelta_2$ die zweite Stelle einnimmt. Man erhält

$$\varDelta_2 = (-1)^{(n-2)^2} \varDelta_3.$$

Fährt man so fort, so ergibt sich

$$\varDelta_1 = (-1)^{(n-1)^2 + (n-2)^2 + (n-3)^2 + \cdots 2^2 + 1^2} \cdot \varDelta_n.$$

Nun ist

$$1^2 + 2^2 + \ldots (n-2)^2 + (n-1)^2 = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{(n-2)(n-1)n}{3}.$$

Es ist $\frac{(n-2)(n-1)n}{3}$ eine gerade Zahl, weil der Dividend gerade ist, so dass man schliesslich erhält

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} a_{n,1} & a_{n-1,1} & \ldots & a_{21} & a_{1,1} \\ a_{n,2} & a_{n-2,2} & \ldots & a_{22} & a_{1,2} \\ \vdots & & & & \\ a_{n,n} & a_{n-1,n} & \ldots & a_{2n} & a_{1n} \end{vmatrix}.$$

Dasselbe Resultat lässt sich auch für die Vertauschung der Horizontalreihen ableiten.

Dieser Satz ist deshalb wichtig, weil sich aus ihm das Vorzeichen der zweiten Diagonalreihe ableiten lässt.

Ordnen wir die Elemente eines jeden Gliedes nach Horizontalreihen, so ist in der gegebenen Determinante das Glied der zweiten Diagonale ohne Vorzeichen

$$\Gamma = a_{n1}\, a_{n-1,2} \cdots a_{1n}.$$

In der Determinante $\varDelta_n$ ist dieses Glied Anfangsglied: demnach muss man Γ mit $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ multipliciren, um das richtige Vorzeichen zu erhalten.

Uebrigens lässt sich dieses Resultat auch durch Berechnung der Inversionen der ersten Indices ableiten.

§ 47.

Determinanten mit gleichen parallelen Reihen.

Sind in einer Determinante Δ_1 zwei parallele Reihen gleich, so geht durch Vertauschung derselben nach dem vorigen Satze Δ_1 in Δ_2 über, wo

$$\Delta_1 = - \Delta_2$$

ist. Nun ist aber, da die vertauschten Elemente gleich sind, auch

$$\Delta_1 = \Delta_2.$$

Dieses ist aber nur möglich, wenn $\Delta_1 = 0$ ist.

Sind demnach zwei parallele Reihen einer Determinante gleich, so ist dieselbe gleich Null.

§ 48.

Entwickelung der Determinanten nach den Elementen einer Reihe.

Bezeichnen wir wieder, wie gewöhnlich, die Determinante mit

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1k} & a_{2k} & \cdots & a_{nk} \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

so wird dieselbe dadurch entwickelt, dass zu jedem Gliede aus jeder Horizontal- und jeder Vertikalreihe ein Element genommen wird. Die Glieder, welche a_{1k} enthalten, haben also kein Element aus der ersten Vertikalreihe und der $k$ten Horizontalreihe ausser $a_{1,k}$. Wir ziehen diese Glieder zusammen und nennen α_{1k} den Coefficienten von a_{1k}, so dass die algebraische Summe dieser Glieder gleich $a_{1k} \cdot \alpha_{1k}$ ist. Ebenso verfahren wir mit a_{1k} bis a_{nk}. Addiren wir nun, so muss

$$a_{1k} \cdot \alpha_{1k} + a_{2k}\, \alpha_{1k} + a_{3k}\, \alpha_{3k} + \cdots + a_{nk}\, \alpha_{nk} = \Delta_1$$

sein. Denn erstens können auf der linken Seite keine Glieder fehlen, die in der Entwickelung von Δ_1 vorkommen, weil

sonst Δ_1 Glieder ohne ein Element der $k$ten Horizontalreihe enthalten würde. Zweitens können keine Glieder wiederholt vorkommen, weil jedes Glied der Entwickelung von Δ_1 nur ein Element der $k$ten Horizontalreihe enthält.

Was hier für eine Horizontalreihe bewiesen ist, lässt sich auch für die Vertikalreihen zeigen.

§ 49.

Folgerungen.

1) Da $\Delta_1 = a_{1k}\,\alpha_{1k} + a_{2k}\,\alpha_{2k} + a_{3k}\,\alpha_{3k} + \ldots + a_{nk}\,\alpha_{nk}$ ist, wo $a_{1k}, a_{2k} \ldots a_{nk}$ die Elemente der $k$ten Horizontalreihe sind, so ist

$$b \,.\, \Delta_1 = b a_{1k}\,\alpha_{1k} + b a_{2k}\,\alpha_{2k} + \ldots + b a_{nk}\,\alpha_{nk},$$

oder mit der andern Bezeichnung

$$b \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{1k} & a_{1k} & a_{3k} & \ldots & a_{nk} \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \ldots & a_{n2} \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ b a_{1k} & b a_{2k} & b a_{3k} & \ldots & b a_{nk} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Aehnliches folgt aus der Entwickelung nach den Elementen einer Vertikalreihe. Hieraus geht der Satz hervor:

Soll eine Zahl mit einer Determinante multiplicirt werden, so braucht man dieselbe nur mit einer Horizontalreihe oder Vertikalreihe zu multipliciren.

Die erhaltene Formel kann übrigens auch rückwärts gelesen werden:

Dividirt man die Elemente einer Reihe durch eine Zahl, so wird die ganze Determinante durch diese Zahl dividirt.

2) Sind die Elemente der $k$ten Horizontalreihe Summen aus gleichviel Summanden, sind nämlich

$$a_{1k} = b_{1k} + b'_{1k},\; a_{2k} = b_{2k} + b'_{2k}; \ldots a_{nk} = b_{nk} + b'_{nk},$$

so erhält man

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (b_{1k} + b'_{1k})\,\alpha_{1k} + (b_{2k} + b'_{2k})\,\alpha_{2k} + \ldots + (b_{nk} + b'_{nk})\,\alpha_{nk} \\ &= [b_{1k}\,\alpha_{1k} + b_{2k}\,\alpha_{2k} + \ldots + b_{nk}\,\alpha_{nk}] \\ &+ [b'_{1k}\,\alpha_{1k} + b'_{2k}\,\alpha_{2k} + \ldots + b'_{nk}\,\alpha_{nk}], \end{aligned}$$

oder mit anderen Zeichen

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{1k}+b'_{1k}; & b_{2k}+b'_{2k} & \ldots b_{nk}+b'_{nk} \\ \vdots & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{1k} & b_{2k} & \ldots & b_{nk} \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \vdots & & & \\ b'_{1k} & b'_{2k} & \ldots & b'_{nk} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Dasselbe gilt für Vertikalreihen. Das Resultat drücken wir daher so aus:

Sind die Elemente einer Horizontal- oder Vertikalreihe algebraische Summen aus gleichviel Gliedern, so ist die Determinante die Summe derjenigen Determinanten, welche man erhält, wenn man an Stelle der Summen die Glieder setzt.

Wie man verfahren muss, wenn einige Elemente nicht so viel Glieder haben als die anderen, ist wohl an sich klar.

---

3) Die Coefficienten von $a_{1k}, a_{2k} \ldots a_{nk}$ wollen wir mit den Elementen einer parallelen Reihe, etwa mit der λten multipliciren und addiren.

Es ist

$$a_{1\lambda}\,\alpha_{1k} + a_{2\lambda}\,\alpha_{2k} + \ldots + a_{n\lambda}\,\alpha_{nk}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots a_{n2} \\ \vdots & & \\ a_{1\lambda} & a_{2\lambda} & \ldots a_{n\lambda} \\ a_{1,k+1} & a_{2,k+1} & \ldots a_{n,k+1} \\ \vdots & \vdots & \\ a_{1\lambda} & a_{2\lambda} & \ldots a_{n\lambda} \\ a_{1,\lambda+1} & a_{2,\lambda+1} & \ldots a_{n,\lambda+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

In dieser Determinante sind die $k$te und λte Horizontalreihe gleich. Sie verschwindet daher. Hieraus geht die wichtige Formel hervor:

$$a_{1\lambda}\,\alpha_{1k} + a_{2\lambda}\,\alpha_{2k} + \ldots + a_{n\lambda}\,\alpha_{nk} = 0,$$

eine Formel, die freilich gar nichts enthält als den Satz von gleichen parallelen Reihen, die aber gerade in dieser Form vorzügliche Dienste leistet.

§ 50.

Addition von Reihen.

Multiplicirt man die Elemente einer Horizontalreihe, z. B. der λten, mit einer beliebigen positiven oder negativen Zahl b und addirt man dann diese Produkte zu den entsprechenden Elementen einer parallelen Reihe, zur $k$ten, ohne die Elemente der λ zu verändern, so erhält man

$$(a_{1k} + b a_{1\lambda})\,\alpha_{1k} + (a_{2k} + b a_{2\lambda})\,\alpha_{2k} + \ldots + (a_{nk} + b a_{n\lambda})\,\alpha_{nk}$$
$$= a_{1k}\alpha_{1k} + a_{2k}\alpha_{2k} + \ldots + a_{nk}\alpha_{nk} + b\,[a_{1\lambda}\,\alpha_{1k} + a_{2\lambda}\,\alpha_{2k} + \ldots + a_{n\lambda}\,\alpha_{nk}]$$
$$= a_{1k}\,\alpha_{1k} + a_{2k}\,\alpha_{2k} + \ldots + a_{n}\,\alpha_{nk},$$

da der Faktor in der eckigen Klammer verschwindet. Dieses wichtige Resultat sprechen wir als Satz aus:

Addirt man zu den Elementen einer Reihe die mit derselben Zahl multiplizirten Elemente einer parallelen Reihe, so bleibt der Werth der Determinante ungeändert.

Dieser Satz gilt ebenso für Vertikalreihen. Auch lässt er sich auf mehrere parallele Reihen ausdehnen.

§ 51.

Bestimmung der Coefficienten $\alpha_{1k}\ldots$

Wir nehmen die Untersuchung von § 48 wieder auf. Jedes Glied der gegebenen Determinante Δ_1 hat ein Element aus jeder Horizontal- und Vertikalreihe. Die Glieder, welche $a_{\lambda k}$ enthalten, sind zu $a_{\lambda k}\,\alpha_{\lambda k}$ zusammengezogen. Jedes Glied in $\alpha_{\lambda k}$ muss also ein Element aus jeder Horizontalreihe und Vertikalreihe mit Ausnahme der $k$ten Horizontal- und der λten Vertikalreihe enthalten. Es würde also $\alpha_{\lambda k}$ eine Determinante mit jenen Reihen sein, wenn die Vorzeichen nach den

für die Bildung der Determinante gegebenen Vorschriften bestimmt werden können. Um diese Untersuchung führen zu können, wollen wir zunächst den Coefficienten α_{11} von a_{11} feststellen.

Die Determinante sei

$$\Delta_1 = \Sigma \pm a_{11}\, a_{22}\, a_{33} \ldots a_{nn}.$$

Man erhält die Glieder, indem man die ersten Indices permutirt. Alle Glieder mit a_{11} ergeben sich demnach dadurch, dass man die ersten Indices von 2 bis n auf jede mögliche Weise permutirt und a_{11} vorschreibt. Da ferner 1 mit den übrigen Indices keine Inversionen bildet, so werden auch die Vorzeichen nur von den Indices 2 bis n abhängen. Hiernach ist

$$\alpha_{11} = \begin{vmatrix} a_{22}\, a_{32}\, a_{42} \ldots a_{n1} \\ a_{23}\, a_{33}\, a_{43} \ldots a_{n3} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{2n}\, a_{3n}\, a_{4n} \ldots a_{nn} \end{vmatrix},$$

also eine Determinante, die dadurch entsteht, dass man die erste Horizontal- und Vertikalreihe auslässt.

Auf diesen Fall wollen wir die Bestimmung von $\alpha_{\lambda k}$ zurückführen. Zu diesem Zwecke vertauschen wir die $k$te Horizontalreihe mit der $(k-1)$ten, dann mit der $(k-2)$ten u. s. f. schliesslich mit der ersten. Hierzu sind $(k-1)$ Vertauschungen von je zwei parallelen Reihen ausgeführt. Nennen wir demnach Δ_2 die neue Determinante, so besteht die Relation

$$\Delta_1 = (-1)^{k-1}\, \Delta_2.$$

Nun vertauschen wir die λte Vertikalreihe mit der $(\lambda - 1)$ten, dann mit der $(\lambda - 2)$ten . . ., endlich mit der 1ten. Heisst die so entstandene Determinante Δ_3, so ist

$$\Delta_2 = (-1)^{\lambda - 1}\, \Delta_3$$

und

$$\Delta_1 = (-1)^{\lambda + k}\, \Delta_3.$$

In Δ_3 ist $a_{\lambda k}$ das Anfangsglied. Es ist somit

$$\alpha_{\lambda k} = (-1)^{\lambda+k} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots a_{\lambda-1,1} & a_{\lambda+1,1} & \dots a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots a_{\lambda-1,2} & a_{\lambda+1,2} & \dots a_{n2} \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ a_{1,k-1} & a_{2,k-1} & \dots a_{\lambda-1,k-1} & a_{\lambda+1,k-1} & \dots a_{n,k-1} \\ a_{1,k+1} & a_{2,k+1} & \dots a_{\lambda-1,k+1} & a_{\lambda+1,k+1} & \dots a_{n,k+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots a_{\lambda-1,n} & a_{\lambda+1,n} & \dots a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Der Coefficient von $a_{\lambda k}$ ist eine Determinante aus $(n-1)^2$ Elementen, welche aus der gegebenen dadurch hervorgeht, dass man aus der gegebenen Determinante die λte Vertikal- und die $k$te Horizontalreihe fortlässt, und derselben das positive oder negative Vorzeichen gibt, je nachdem $\lambda + k$ gerade oder ungerade ist.

Bei der Entwickelung der Determinanten ist es häufig erwünscht, $\alpha_{\lambda k}$ durch cyklische Vertauschungen aus Δ_1 abzuleiten. Man bringt durch $(k-1)$ cyklische Vertauschungen aller Horizontalreihen die $k$te Reihe an die erste Stelle. Dadurch werden $(n-1)(k-1)$ Zeichenwechsel veranlasst. Dann vertauscht man alle Vertikalreihen $(\lambda-1)$mal cyklisch wodurch $(\lambda-1)(n-1)$ Zeichenwechsel entstehen. Im Ganzen entstehen also $(n-1)(k+\lambda-2)$ Zeichenwechsel. Die so gebildete Determinante ist demnach mit

$$(-1)^{(n-1)(k+\lambda)}$$

zu multipliciren, um den Faktor von $a_{\lambda k}$ zu gewinnen.

Hieraus zieht man leicht die nützlichen Bemerkungen, dass bei ungeraden n alle Coefficienten, welche mit Hülfe der cyklischen Vertauschungen abgeleitet sind, das positive Vorzeichen haben.

Entwickelt man bei geraden n die Determinante nach den Elementen einer Reihe, so wechseln die negativen Vorzeichen mit den positiven ab.

Die Coefficienten $\alpha_{1k}, \alpha_{2k} \dots \alpha_{nk}$ heissen Unterdeterminanten oder Minoren. Ferner nennt man sie die zu den Elementen $a_{1k}, a_{2k} \dots a_{nk}$ adjungirten Elemente.

§ 52.

Determinanten mit verschwindenden Gliedern.

Es sei

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \dots a_{\lambda 1} & \dots a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \dots a_{\lambda 2} & \dots a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 \quad \dots a_{\lambda k} & \dots 0 \\ a_{1,k+1} & a_{2,k+1} & \cdot \quad \dots a_{\lambda,k+1} & \dots a_{n,k+1} \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} \dots a_{\lambda,n} & \dots a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

In dieser Determinante verschwinden alle Elemente der $k$ten Horizontalreihe mit Ausnahme von $a_{\lambda k}$. Entwickeln wir Δ_1 nach den Elementen dieser Reihe, so werden alle Glieder 0 mit Ausnahme von $a_{\lambda k} \cdot \alpha_{\lambda k}$.

Daher ist nach § 51

$$\Delta_1 = (-1)^{\lambda+k} a_{\lambda k} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots a_{\lambda-1,1} & a_{\lambda+1,1} & \dots a_{n1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1,k-1}, & a_{2,k-1} & \dots a_{\lambda-1,k-1}, & a_{\lambda+1,k-1} & \dots a_{n,k+1} \\ a_{1,k+1}, & a_{2,k+1} & \dots a_{\lambda-1,k+1}, & a_{\lambda+1,k+1} & \dots a_{n,k+1} \\ \vdots & \vdots & & & \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \dots a_{\lambda-1,n}, & a_{\lambda+1,n} & \dots a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Diese Formel liefert mit Hinblick auf den Schluss von § 51 den Satz:

Verschwinden die Elemente einer Reihe mit Ausnahme eines einzigen, so ist die Determinante gleich dem Produkte aus diesem Elemente und dem ihm adjungirten.

Beachtet man weiter, dass die zum ersten Elemente gehörende Unterdeterminante das positive Vorzeichen hat, so folgt von selbst

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & a_{11} & a_{21} \\ x_2 & a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & 1 & 0 & 0 \\ y_2 & x_1 & a_{11} & a_{21} \\ y_3 & x_2 & a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

und so für beliebige Determinanten. **Man kann also den Grad einer Determinante beliebig erhöhen.**

Ferner ergibt sich leicht der Satz: **Verschwinden alle Elemente einer Reihe, so ist die Determinante Null.**

Die in den letzten §§ gewonnenen Eigenschaften sind für die Transformation und Berechnung der Determinanten sehr wichtig; es ist daher erforderlich, dieselben, bevor wir weiter gehen, durch eine Reihe von Beispielen zu illustriren, um mit diesen Sätzen vollständig vertraut zu werden.

§ 53.

Beispiele und Aufgaben.

$$1)\ \alpha)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \overset{\beta)}{=} \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\gamma)}{=} 4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \overset{\delta)}{=} 4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\varepsilon)}{=} (-1)^{3+2} \cdot 4 \cdot (-2) \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\zeta)}{=} (-1)^{3+2} \cdot 4 \cdot (-2) \cdot 2 = +16.$$

Erläuterung. Um β) zu erhalten, wurden die zweite, dritte und vierte Vertikalreihe zur ersten addirt, die übrigen unverändert beibehalten [Erweiterung des Lehrsatzes § 50]. Durch Anwendung von § 52 auf β) ergibt sich γ). δ) folgt aus γ) durch Addition der dritten Horizontalreihe zur zweiten (besser würde man die zweite zur ersten addiren). Dann wurde wieder § 52 angewandt, indem $\lambda = 3$, $k = 2$ ist. Schliesslich wurde die Determinante zweiten Grades entwickelt, nämlich $(-1)(-1) - (-1)(1) = 2$.

$$2)\ \alpha)\ \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 6 & -5 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \overset{\beta)}{} \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 6 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= \underset{\gamma)}{\begin{vmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \\ -5 & 3 & -7 \end{vmatrix}} = \underset{\delta)}{\begin{vmatrix} 6 & -5 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & -2 \end{vmatrix}}$$

$$= (-1)^{1+2}\, 2 \cdot \underset{\varepsilon)}{\begin{vmatrix} -5 & -9 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}} = \underset{\zeta)}{-2}\,(10 + 27) = -74.$$

Erläuterung. Von der dritten Horizontalreihe wurde die vierte subtrahirt, die vierte mit 2 multiplicirt, der Faktor $\frac{1}{2}$ zur Aufhebung vorgeschrieben, und die erste von der vierten Horizontalreihe subtrahirt. So entstand $\beta)$ (Lehrsätze § 50 und § 49). $\gamma)$ ergibt sich durch Anwendung von § 52; $\delta)$ aus $\gamma)$ durch Subtraktion der ersten Vertikalreihe von der dritten; weiter $\varepsilon)$ durch § 52 und $\zeta)$ aus $\varepsilon)$ durch Entwickelung.

$$3) \begin{vmatrix} 25 & 5 & 10 \\ 15 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -3 \cdot 5 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -135.$$

Hier wurden die gemeinschaftlichen Faktoren der ersten und zweiten Horizontalreihe vorgesetzt, dann die erste von der zweiten substrahirt u. s. f.

4) Welchen Werth hat

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 10 \\ 1 & -1 & -1 & 5 \\ 3 & -3 & 3 & -15 \\ 1 & 1 & -1 & -5 \end{vmatrix}?$$

Antwort: $+480$.

Anmerkung. Auf Beispiel 1) ist diese Aufgabe zurückzuführen.

5) Wie gross ist

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 8 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & 8 & 4 \\ 3 & 6 & 3 & 3 \end{vmatrix}?$$

Antwort: $+600$.

6) Bestimme den Werth von

$$\begin{vmatrix} 7 & 9 & 3 & 4 \\ -5 & 2 & -3 & 8 \\ 4 & 1 & 7 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Antwort: $-77.$

7) Beweise, dass

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

ist.

Anmerkung. Reducire und berechne.

8) Berechne

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & 5 & 2 \\ 21 & 42 & 35 & 7 \\ 12 & 24 & 8 & 6 \\ 15 & 6 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Antwort: $2 \cdot 3^2 \cdot 7$. [Benutze Aufgabe 7).]

9) Bestimme den Werth von

$$\begin{vmatrix} 7, & 112, & 13, & 15, & 8 \\ 0, & 2, & 117, & 19, & 11 \\ 0, & 0, & 7, & 2, & 9 \\ 0, & 0, & 0, & 8, & 123 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 3 \end{vmatrix}.$$

Antwort: $2 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 8.$

10) Berechne

$$\begin{vmatrix} 10 & 4 & 5 \\ 15 & 5 & 6 \\ 20 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \cdot 5 \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot 5 \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -10.$$

11) Ferner

$$\begin{vmatrix} 10 & 4 & 5 \\ 15 & 5 & 6 \\ 20 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

12) Ferner

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

13) Verwandle

$$\begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} + c_{11}; & a_{12} + b_{12} + c_{12}; & a_{13} + b_{13} + c_{13} \\ a_{21} + b_{21} + c_{21}; & a_{22} + b_{22} + c_{22}; & a_{23} + b_{23} + c_{23} \\ a_{31} + b_{31} + c_{31}; & a_{32} + b_{32} + c_{32}; & a_{33} + b_{33} + c_{33} \end{vmatrix}$$

in eine Summe von 27 Determinanten mit Benutzung von § 49, 2).

14)

$$\alpha) \begin{vmatrix} x_1 - x; & y_1 - y \\ x_2 - x; & y_2 - y \end{vmatrix} = \beta) \begin{vmatrix} 1; & x; & y; \\ 0; & x_1 - x; & y_1 - y \\ 0; & x_2 - x; & y_2 - y \end{vmatrix}$$

$$= \gamma) \begin{vmatrix} 1, & x, & y \\ 1, & x_1, & y_1 \\ 1, & x_2, & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1, & y_1 \\ x_2, & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2, & y_2 \\ x, & y \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} x, & y \\ x_1, & y_1 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - y_1 x_2 + x_2 y - y_2 x + x y_1 - y x_1.$$

Erläuterung. Auf α) ist die Schlussbemerkung von § 52 angewandt; in β) ist zur zweiten und dritten Horizontalreihe die erste addirt (vgl. § 50). γ) ist dann entwickelt nach den Elementen der ersten Vertikalreihe. Hierbei sind die Coefficienten (Unterdeterminanten) dieser Elemente durch cyklische Vertauschungen abgeleitet. [S. § 51.] Hätte man γ) nach den Elementen der ersten Horizontalreihe entwickelt, so würde man bei Anwendung cyklischer Vertauschungen erhalten:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix}$$

$$= (x_1 y_2 - y_1 x_2) + x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1).$$

Ebenso behandelt ist das folgende Beispiel:

15)

$$\begin{vmatrix} x_1 - x; & y_1 - y; & z_1 - z \\ x_2 - x; & y_2 - y; & z_2 - z \\ x_3 - x; & y_3 - y; & z_3 - z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1; & x; & y; & z \\ 0; & x_1 - x; & y_1 - y; & z_1 - z \\ 0; & x_2 - x; & y_2 - y; & z_2 - z \\ 0; & x_3 - x; & y_3 - y; & z_3 - z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1; & x; & y; & z \\ 1; & x_1; & y_1; & z_1 \\ 1; & x_2; & y_2; & z_2 \\ 1; & x_3; & y_3; & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1; & y_1; & z_1 \\ x_2; & y_2; & z_2 \\ x_3; & y_3; & z_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_2; & y_2; & z_2 \\ x_3; & y_3; & z_3 \\ x; & y; & z \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} x_3; & y_3; & z_3 \\ x; & y; & z \\ x_1; & y_1; & z_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x; & y; & z \\ x_1; & y_1; & z_1 \\ x_2; & y_2; & z_2 \end{vmatrix}$$

oder

$$= \begin{vmatrix} x_1; & y_1; & z_1 \\ x_2; & y_2; & z_2 \\ x_3; & y_3; & z_3 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} y_1; & z_1; & 1 \\ y_2; & z_2; & 1 \\ y_3; & z_3; & 1 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} z_1; & 1; & x_1 \\ z_2; & 1; & x_2 \\ z_3; & 1; & x_3 \end{vmatrix} - z \begin{vmatrix} 1; & x_1; & y_1 \\ 1; & x_2; & y_2 \\ 1; & x_3; & y_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left[x_1(y_2 z_3 - z_2 y_3) + x_2(y_3 z_1 - z_3 y_1) + x_3(y_1 z_2 - z_1 y_2)\right]$$
$$- x\left[y_1(z_2 - z_3) + y_2(z_3 - z_1) + y_3(z_1 - z_2)\right]$$
$$+ y\left[z_1(x_3 - x_2) + z_2(x_1 - x_3) + z_3(x_2 - x_1)\right]$$
$$- z\left[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right].$$

16) Entwickele

$$\begin{vmatrix} \cos\lambda; & \cos\mu; & \cos\nu \\ \cos\lambda_1; & \cos\mu_1; & \cos\nu_1 \\ \cos\lambda_2; & \cos\mu_2; & \cos\nu_2 \end{vmatrix}$$

nach den Elementen der ersten Vertikalreihe.

Antwort:

$$\cos\lambda(\cos\mu_1 \cos\nu_2 - \cos\nu_1 \cos\mu_2) + \cos\lambda_1(\cos\mu_2 \cos\nu - \cos\nu_2 \cos\mu) + \cos\lambda_2(\cos\mu \cos\nu_1 - \cos\nu \cos\mu_1).$$

17) Gib den Werth an von

$$\begin{vmatrix} -1; & \cos\gamma; & \cos\beta \\ \cos\gamma; & -1; & \cos\alpha \\ \cos\beta; & \cos\alpha; & -1 \end{vmatrix}.$$

unter der Voraussetzung, dass α, β, γ die Winkel eines ebenen Dreiecks sind.

Antwort: 0; es ist nach Beispiel 10) zu entwickeln und mit Hülfe der Relation $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$ das Resultat nachzuweisen.

18) $$\begin{vmatrix} 0; & 1; & 1; & 1 \\ 1; & 0; & z^2; & y^2 \\ 1; & z^2; & 0; & x^2 \\ 1; & y^2; & x^2; & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{x^2 y^2 z^2} \begin{vmatrix} 0; & x; & y; & z \\ x; & 0; & z^2 xy; & y^2 xz \\ y; & z^2 xy; & 0; & x^2 yz \\ z; & y^2 xz; & x^2 yz; & 0 \end{vmatrix}$$

$$= xyz \begin{vmatrix} 0; & \frac{1}{yz}; & \frac{1}{xz}; & \frac{1}{xy} \\ x; & 0; & z; & y \\ y; & z; & 0; & x \\ z; & y; & x; & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0; & x; & y; & z \\ x; & 0; & z; & y \\ y; & z; & 0; & x \\ z; & y; & x; & 0 \end{vmatrix}.$$

19) Folgendes Beispiel, welches nützlich bei der Umwandlung der rechtwinkeligen Coordinaten in elliptische ist, wollen wir durchführen:

$$\varDelta_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1 + \lambda_1}; & \frac{1}{a_2 + \lambda_1}; & \frac{1}{a_3 + \lambda_1} \\ \frac{1}{a_1 + \lambda_2}; & \frac{1}{a_2 + \lambda_2}; & \frac{1}{a_3 + \lambda_2} \\ \frac{1}{a_1 + \lambda_3}; & \frac{1}{a_2 + \lambda_3}; & \frac{1}{a_3 + \lambda_2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{P} \begin{vmatrix} (a_2 + \lambda_1)(a_3 + \lambda_1); & (a_3 + \lambda_1)(a_1 + \lambda_1); & (a_1 + \lambda_1)(a_2 + \lambda_1) \\ (a_2 + \lambda_2)(a_3 + \lambda_2); & (a_3 + \lambda_2)(a_1 + \lambda_2); & (a_1 + \lambda_2)(a_2 + \lambda_2) \\ (a_2 + \lambda_3)(a_3 + \lambda_3); & (a_3 + \lambda_3)(a_1 + \lambda_3); & (a_1 + \lambda_3)(a_2 + \lambda_3) \end{vmatrix}$$

wo $P = (a_1 + \lambda_1)(a_2 + \lambda_1)(a_3 + \lambda_1)(a_1 + \lambda_2)(a_2 + \lambda_2)(a_3 + \lambda_2)$ $(a_1 + \lambda_3)(a_2 + \lambda_3)(a_3 + \lambda_3)$ ist. Die erste Horizontalreihe wurde nämlich mit den 3 ersten dieser Faktoren, die zweite mit den folgenden 3 und die letzte mit den letzten 3 multiplicirt. Subtrahirt man nun von der ersten Horizontalreihe die zweite, von der zweiten die dritte, so wird

$$\varDelta = \frac{1}{P} \times$$

$$\begin{vmatrix} (\lambda_1 - \lambda_2)(a_2 + a_3 + \lambda_1 + \lambda_2); & (\lambda_1 - \lambda_2)(a_2 + a_3 + \lambda_1 + \lambda_2); & (\lambda_1 - \lambda_2)(a_1 + a_2 + \lambda_1 + \lambda_2) \\ (\lambda_2 - \lambda_3)(a_2 + a_3 + \lambda_2 + \lambda_3); & (\lambda_2 - \lambda_3)(a_3 + a_1 + \lambda_2 + \lambda_3); & (\lambda_3 - \lambda_2)(a_1 + a_2 + \lambda_2 + \lambda_3) \\ (a_2 + \lambda_3)\ (a_3 + \lambda_3); & (a_3 + \lambda_3)\ (a_1 + \lambda_3); & (a_1 + a_3)\ (\lambda_2 + \lambda_3) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_3)}{P} \times$$

$$\begin{vmatrix} a_2+a_3+\lambda_1+\lambda_2; & a_3+a_1+\lambda_1+\lambda_2; & a_1+a_2+\lambda_1+\lambda_2 \\ a_2+a_3+\lambda_2+\lambda_3; & a_3+a_1+\lambda_2+\lambda_3; & a_1+a_2+\lambda_2+\lambda_3 \\ (a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3); & (a_3+\lambda_3)(a_1+\lambda_3); & (a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3) \end{vmatrix}.$$

Weiter wird die zweite Vertikalreihe von der ersten, von der zweiten die dritte subtrahirt:

$$\Delta = \frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}{P} \times$$

$$\begin{vmatrix} a_2-a_1; & a_3-a_2; & a_1+a_2+\lambda_1+\lambda_2 \\ a_2-a_1; & a_3-a_2; & a_1+a_2+\lambda_2+\lambda_3 \\ (a_2-a_1)(a_3+\lambda_3); & (a_3-a_2)(a_1+\lambda_3); & (a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(a_1-a_2)(a_2-a_3)(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_3)}{P} \times$$

$$\begin{vmatrix} 1; & 1; & a_1+a_2+\lambda_1+\lambda_2 \\ 1; & 1; & a_1+a_2+\lambda_2+\lambda_3 \\ a_3+\lambda_3; & a_1+\lambda_3; & (a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3) \end{vmatrix}.$$

Durch Subtraktion der zweiten Vertikalreihe von der ersten:

$$\Delta_1 = \frac{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_3)}{P} \times$$

$$\begin{vmatrix} 0; & 1; & a_1+a_2+\lambda_1+\lambda_2 \\ 0; & 1; & a_1+a_2+\lambda_2+\lambda_3 \\ a_3-a_1; & a_1+\lambda_3; & (a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1)(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_3)}{P} \begin{vmatrix} 1; & a_1+a_2+\lambda_1+\lambda_2 \\ 1; & a_1+a_2+\lambda_2+\lambda_3 \end{vmatrix}.$$

$$\Delta_1 = \frac{(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1)(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_3-\lambda_1)}{(a_1+\lambda_1)(a_2+\lambda_1)(a_3+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)(a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)}.$$

Uebrigens lässt sich diese Entwickelung errathen, wenn man erkannt hat, dass je einer der Faktoren $(a_\mu - a_\nu)$, $(\lambda_\varkappa - \lambda_\iota)$, $\frac{1}{a_\gamma + a_\vartheta}$ vorkommt, da die Determinante in Bezug auf diese homogen ist.

20)
$$D_1 = \begin{vmatrix} 1; & \frac{1}{a_2+\lambda_1}; & \frac{1}{a_3+\lambda_1} \\ 1; & \frac{1}{a_2+\lambda_2}; & \frac{1}{a_3+\lambda_2} \\ 1; & \frac{1}{a_2+\lambda_3}; & \frac{1}{a_3+\lambda_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1; & \frac{1}{a_2+\lambda_1}; & \frac{1}{a_3+\lambda_1} \\ 0; & \frac{\lambda_1-\lambda_2}{(a_2+\lambda_1)(a_2+\lambda_2)}; & \frac{\lambda_1-\lambda_2}{(a_3+\lambda_1)(a_3+\lambda_2)} \\ 0; & \frac{\lambda_2-\lambda_3}{(a_2+\lambda_2)(a_2+\lambda_3)}; & \frac{\lambda_2-\lambda_3}{(a_3+\lambda_2)(a_3+\lambda_3)} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_3)}{(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_2+\lambda_1}; & \frac{1}{a_3+\lambda_1} \\ \frac{1}{a_2+\lambda_3}; & \frac{1}{a_3+\lambda_3} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_3)}{(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)} \begin{vmatrix} \frac{\lambda_3-\lambda_1}{(a_2+\lambda_1)(a_2+\lambda_3)}; & \frac{\lambda_3-\lambda_1}{(a_3+\lambda_1)(a_3+\lambda_3)} \\ \frac{1}{a_2+\lambda_3}; & \frac{1}{a_3+\lambda_3} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_3-\lambda_1)}{(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_2+\lambda_1}; & \frac{1}{a_3+\lambda_1} \\ 1; & 1 \end{vmatrix}.$$

$$D_1 = \frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_3-\lambda_1)(a_3-a_2)}{(a_2+\lambda_1)(a_2+\lambda_2)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_1)(a_3+\lambda_2)(a_3+\lambda_3)}.$$

21) Entwickele

$$\begin{vmatrix} A-s; & B_2; & B_1 \\ B_2; & A_1-s; & B \\ B_1; & B; & A_2-s \end{vmatrix}$$

und ordne das Resultat nach Potenzen von s.

Antwort:

$$-s^3+s^2(A+A_1+A_2)+s(B^2+B_1^2+B_2^2-AA_1-AA_2 - A_1A_2)-(AB^2+A_1B_1^2+A_2B_2^2-AA_1A_2-2BB_1B_2).$$

Anmerkung. Diese Determinante ist für die Theorie der Transformation geradliniger Coordinaten von Bedeutung.

22) Stelle $\cos(\alpha+\beta)$ als Determinante dar.

Antwort:
$$\begin{vmatrix} \cos\alpha; & \sin\alpha \\ \sin\beta; & \cos\beta \end{vmatrix}.$$

23)
$$\begin{vmatrix} 1; & b-c; & d \\ 1; & b_1-c; & d_1 \\ 1; & b_2-c; & d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1; & b; & d \\ 1; & b_1; & d_1 \\ 1; & b_2; & d_2 \end{vmatrix} - c \begin{vmatrix} 1; & 1; & d \\ 1; & 1; & d_1 \\ 1; & 1; & d_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1; & b; & d \\ 1; & b_1; & d_1 \\ 1; & b_2; & d_2 \end{vmatrix}.$$

24) $$\begin{vmatrix} 1; & b-c; & d-e \\ 1; & b_1-c; & d_1-e \\ 1; & b_2-c; & d_2-e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1; & b; & d-e \\ 1; & b_1; & d_1-e \\ 1; & b_2; & d_2-e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1; & b; & d \\ 1; & b_1; & d_1 \\ 1; & b_2; & d_2 \end{vmatrix}.$$

Anmerkung. Mit Benutzung des vorigen Beispiels.

25) Schreibt man in Beispiel 10) für 0 $x-x$ und $y-y$, so wird

$$\begin{vmatrix} x_1-x; & y_1-y \\ x_2-x; & y_2-y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1; & x-x; & y-y \\ 1; & x_1-x; & y_1-y \\ 1; & x_2-x; & y_2-y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1; & x; & y \\ 1; & x_1; & y_1 \\ 1; & x_2; & y_2 \end{vmatrix}. .$$

Mit Benutzung von Beispiel 24).

26) $$\begin{vmatrix} x_1+x; & y_1+y \\ x_2+x; & y_2+y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1; & -x+x; & -y+y \\ 1; & x_1+x; & y_1+y \\ 1; & x_2+x; & y_2+y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1; & -x; & -y \\ 1; & x_1; & y_1 \\ 1; & x_2; & y_2 \end{vmatrix}.$$

27) $$\begin{vmatrix} a_{11}; & a_{21}; & a_{31} \\ a_{12}; & a_{22}; & a_{32} \\ a_{13}; & a_{23}; & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{x}\begin{vmatrix} a_{11}x+a_{21}y+a_{31}z; & a_{21}; & a_{31} \\ a_{12}x+a_{22}y+a_{32}z; & a_{22}; & a_{32} \\ a_{13}x+a_{23}y+a_{33}z; & a_{23}; & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{y}\begin{vmatrix} a_{11}; & a_{11}x+a_{21}y+a_{31}z; & a_{31} \\ a_{12}; & a_{12}x+a_{22}y+a_{32}z; & a_{32} \\ a_{13}; & a_{13}x+a_{23}y+a_{33}z; & a_{33} \end{vmatrix} = \text{etc.}$$

Im ersten Falle wurde die erste Vertikalreihe mit x multiplicirt, also auch die ganze Determinante; dann das $y$fache der zweiten und das $z$fache der dritten addirt, wobei die Determinante ungeändert bleibt.

28) Multiplicirt man die erste Horizontalreihe der folgenden Determinante mit b_0, die zweite mit b_1, die dritte mit b_2 u. s. f., so wird

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_0; & b_1; & 0; & 0; & 0 \\ a_1; & -b_0; & b_2; & 0; & 0 \\ a_2; & 0; & -b_1; & b_3; & 0 \\ a_3; & 0; & 0; & -b_2; & b_4 \\ a_4; & 0; & 0; & 0; & -b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{b_0 b_1 b_2 b_3 b_4}\begin{vmatrix} a_0 b_0; & b_1 b_0; & 0; & 0; & 0 \\ a_1 b_1; & -b_0 b_1; & b_2 b_1; & 0; & 0 \\ a_2 b_2; & 0; & -b_1 b_2; & b_3 b_2; & 0 \\ a_3 b_3; & 0; & 0; & -b_2 b_3; & b_4 b_3 \\ a_4 b_4; & 0; & 0; & 0; & -b_3 b_4 \end{vmatrix}.$$

Addirt man jetzt zur ersten Horizontalreihe die 4 folgenden, zur zweiten die 3 folgenden, zur dritten die 2 folgenden u. s. f. und setzt

$$\begin{aligned}
s &= a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4 \\
s_1 &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4 \\
s_2 &= a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4 \\
s_3 &= a_3 b_3 + a_4 b_4 \\
s_4 &= a_4 b_4 ,
\end{aligned}$$

so wird

$$\varDelta_1 = \cdot \frac{1}{b_0 b_1 b_2 b_3 b_4} \begin{vmatrix} s; & 0; & 0; & 0; & 0 \\ s_1; & -b_0 b_1; & 0; & 0; & 0 \\ s_2; & 0; & -b_1 b_2; & 0; & 0 \\ s_3; & 0; & 0; & -b_2 b_3; & 0 \\ s_4; & 0; & 0; & 0; & -b_3 b_4 \end{vmatrix}$$

$$= s \cdot b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot b_4 = (a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4)\, b_1 b_2 b_3 b_4 .$$

29) Beweise, dass

$$\begin{vmatrix} a_{11}; & 0; & 0; & 0; & 0 \\ a_{12}; & a_{22}; & 0; & 0; & 0 \\ a_{13}; & a_{23}; & a_{33}; & 0; & 0 \\ a_{14}; & a_{24}; & a_{34}; & a_{44}; & 0 \\ a_{15}; & a_{25}; & a_{35}; & a_{45}; & a_{55} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22}\, a_{33}\, a_{44}\, a_{55} \text{ ist.}$$

30) Welchen Werth hat

$$\begin{vmatrix} 1; & 0; & 0; & 0; & 0; & 0 \\ 1; & x_1; & 0; & 0; & 0; & 0 \\ 1; & x_2; & y_1; & 0; & 0; & 0 \\ 1; & x_3; & y_2; & z_1; & 0; & 0 \\ 1; & x_4; & y_3; & z_2; & u_1; & v_1 \\ 1; & x_5; & y_4; & z_3; & u_2; & v_2 \end{vmatrix} ?$$

Antwort: $x_1 y_1 z_1 (u_1 v_2 - v_1 u_2)$.

31) $$\begin{vmatrix} a_{11}; & a_{21}; & a_{31} + x \\ a_{12}; & a_{22}; & a_{32} \\ a_{13}; & a_{23}; & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}; & a_{21}; & a_{31} \\ a_{12}; & a_{22}; & a_{32} \\ a_{13}; & a_{23}; & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}; & a_{21}; & x \\ a_{12}; & a_{22}; & 0 \\ a_{13}; & a_{23}; & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}; & a_{21}; & a_{31} \\ a_{12}; & a_{22}; & a_{32} \\ a_{12}; & a_{23}; & a_{33} \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} a_{12}; & a_{22} \\ a_{13}; & a_{23} \end{vmatrix} .$$

$$32)\quad \begin{vmatrix} a_{12}-a_{11}x; & a_{22}-a_{21}x; & a_{32}-a_{31}x \\ a_{13}-a_{12}x; & a_{23}-a_{22}x; & a_{33}-a_{32}x \\ a_{14}-a_{13}x; & a_{24}-a_{23}x; & a_{34}-a_{33}x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1; & a_{11}; & a_{21}; & a_{31} \\ 0; & a_{12}-a_{11}x; & a_{22}-a_{21}x; & a_{32}-a_{31}x \\ 0; & a_{13}-a_{12}x; & a_{23}-a_{22}x; & a_{33}-a_{32}x \\ 0; & a_{14}-a_{13}x; & a_{24}-a_{23}x; & a_{34}-a_{33}x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1; & a_{11}; & a_{21}; & a_{31} \\ x; & a_{12}; & a_{22}; & a_{32} \\ x^2; & a_{13}; & a_{23}; & a_{33} \\ x^3; & a_{14}; & a_{24}; & a_{34} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12}; & a_{22}; & a_{32} \\ a_{13}; & a_{23}; & a_{33} \\ a_{14}; & a_{24}; & a_{34} \end{vmatrix}$$

$$- x \begin{vmatrix} a_{13}; & a_{23}; & a_{33} \\ a_{14}; & a_{24}; & a_{34} \\ a_{11}; & a_{21}; & a_{31} \end{vmatrix} + x^2 \begin{vmatrix} a_{14}; & a_{24}; & a_{34} \\ a_{11}; & a_{21}; & a_{31} \\ a_{12}; & a_{22}; & a_{32} \end{vmatrix} + x^3 \begin{vmatrix} a_{11}; & a_{21}; & a_{31} \\ a_{12}; & a_{22}; & a_{32} \\ a_{13}; & a_{23}; & a_{33} \end{vmatrix}.$$

33) Für geübtere Leser geben wir folgende Aufgabe.

Wie gross ist $\frac{\Delta_1}{D_1}$, wenn

$$D_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+\lambda_1}, & \frac{1}{a_2+\lambda_1}, & \frac{1}{a_3+\lambda_1}, & \cdots & \frac{1}{a_n+\lambda_1} \\ \frac{1}{a_1+\lambda_2}, & \frac{1}{a_2+\lambda_2}, & \frac{1}{a_3+\lambda_2}, & \cdots & \frac{1}{a_n+\lambda_2} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \frac{1}{a_1+\lambda_n}, & \frac{1}{a_2+\lambda_n}, & \frac{1}{a_3+\lambda_n}, & \cdots & \frac{1}{a_n+\lambda_n} \end{vmatrix}$$

und

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1, & \frac{1}{a_2+\lambda_1}, & \frac{1}{a_3+\lambda_1}, & \cdots & \frac{1}{a_n+\lambda_1} \\ 1, & \frac{1}{a_2+\lambda_2}, & \frac{1}{a_3+\lambda_2}, & \cdots & \frac{1}{a_n+\lambda_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 1, & \frac{1}{a_2+\lambda_n}, & \frac{1}{a_3+\lambda_n}, & \cdots & \frac{1}{a_n+\lambda_n} \end{vmatrix}$$

ist?

Antwort: $$\frac{\Delta_1}{D_1} = \frac{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)\ldots(a_1+\lambda_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)}.$$

34) In wie viel Determinanten von demselben Grade zerfällt

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\alpha_{11}, a_{21}+\alpha_{21}, a_{31}+\alpha_{31} \\ a_{12}+\alpha_{12}, a_{22}+\alpha_{22}, a_{32}+\alpha_{32} \\ a_{13}+\alpha_{13}, a_{23}+\alpha_{23}, a_{33}+\alpha_{33} \end{vmatrix} ?$$

Antwort: 8.

35) Beweise, dass eine Determinante nur ihr Vorzeichen ändert, wenn darin zwei Horizontalreihen vertauscht werden.

§ 54.

Einige besondere Determinanten.

Bevor wir in der Theorie weiter gehen, müssen wir noch eine andere Methode der Entwickelung einer Determinante kennen lernen. Wir legen ein Beispiel zu Grunde. Es sei

$$1) \qquad \varDelta_1 = \begin{vmatrix} a\,b\,c\,d \\ b\,a\,d\,c \\ c\,d\,a\,b \\ d\,c\,b\,a \end{vmatrix}.$$

Addiren wir zur ersten Horizontalreihe die drei folgenden, so ergibt sich, dass $\varDelta_1$ den Faktor $(a+b+c+d)$ hat.

Addiren wir zur ersten Zeile die zweite und subtrahiren die dritte und vierte, so erkennen wir, dass $(a+b-c-d)$ ein Faktor der Determinante ist. Addiren wir die dritte und subtrahiren die zweite und die vierte, so erhalten wir den Faktor $(a-b+c-d)$. Durch Addition der vierten und Subtraktion der zweiten und dritten leiten wir den Faktor $(a-b-c+d)$ ab.

Diese vier Faktoren sind relative Primzahlen; also ist auch ihr Produkt ein Faktor der Determinante und

$$2) \quad \varDelta_1 = G(a+b+c+d)(a+b-c-d) \times (a-b+c-d)(a-b-c+d).$$

Welchen Werth hat G? Das Anfangsglied in 1) ist a^4. Diesem entspricht in 2, $G \cdot a^4$; daher ist

$$G = 1$$

und

$$\varDelta_1 = (a+b+c+d)(a+b-c-d) \times (a-b+c-d)(a-b-c+d).$$

Nach dieser Methode soll noch die folgende Determinante behandelt werden.

$$3)\qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & u_1 & u_1^2 & u_1^3 \dots u_1^{n-1} \\ 1 & u_2 & u_2^2 & u_2^3 \dots u_2^{n-1} \\ 1 & u_3 & u_3^2 & u_3^3 \dots u_3^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ 1 & u_n & u_n^2 & u_n^3 \dots u_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Ziehen wir von der ersten Horizontalreihe die zweite ab, so finden wir den Theiler $(u_1 - u_2)$, da $(u_1^\mu - u_2^\mu)$ durch $(u_1 - u_2)$ ohne Rest theilbar ist. Ziehen wir die dritte ab, so ergibt sich $(u_1 - u_3)$ als Theiler; fahren wir so fort bis zur $n$ten, so sieht man, dass alle Differenzen bis $(u_1 - u_n)$ Theiler der Determinante sind. Diese Differenzen sind relative Primzahlen; also hat die Determinante den Faktor

$$(u_1 - u_2)(u_1 - u_3)(u_1 - u_4)\dots(u_1 - u_n).$$

Ziehen wir nun weiter die erste Horizontalreihe von der zweiten ab, so erhalten wir keinen neuen Faktor, weil $u_2 - u_1 = -(u_1 - u_2)$ ist. Wir ziehen daher nach einander die dritte, vierte, bis $n$te Reihe von der zweiten ab, wodurch sich

$$(u_2 - u_3)(u_2 - u_4)\dots(u_2 - u_n)$$

als Faktor der Determinante ergibt.

Auf diese Weise fortfahrend, schliesst man, dass

$$\begin{aligned} 4)\quad \Delta_1 = G.(u_1 - u_2)(u_1 - u_3)(u_1 - u_4)(u_1 - u_5)\dots(u_1 - u_n) \\ \times(u_2 - u_3)(u_2 - u_4)(u_2 - u_5)\dots(u_2 - u_n) \\ \times(u_3 - u_4)(u_3 - u_5)\dots(u_3 - u_n) \\ \times(u_4 - u_5)\dots(u_4 - u_n) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (u_{n-1} - u_n) \end{aligned}$$

ist. Es bleibt noch der Faktor G zu bestimmen. Das Anfangsglied in 3) ist

$$5)\qquad + u_2 \cdot u_3^2 \cdot u_4^3 \cdot u_5^4 \dots u_n^{n-1}.$$

Das entsprechende Glied in 4) wird gefunden, indem man alle negativen Glieder mit einander multiplicirt. Da

— u_2 einmal, — u_3 zweimal, — u_4 dreimal u. s. f. vorkommen, so beträgt die Anzahl dieser Faktoren

$$1+2+3+4+\ldots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

Mit 5) correspondirt also

$$(-1)^{\frac{n(n-1}{2}}\cdot G\cdot u_2\, u_3{}^2\cdot u_4{}^3\ldots u_n{}^{n-1}.$$

Demnach ist

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot G=1 \qquad \text{und}$$

$$G=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

§ 55.

Erweiterung der Sätze in § 52.

Wir haben früher (§ 52) bewiesen, dass

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \ldots & a_{n2} \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \ldots & a_{n2} \\ a_{23} & a_{33} \ldots & a_{n3} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{2n} & a_{3n} \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ist. Diesen Satz wollen wir weiter entwickeln, indem wir zunächst untersuchen, welchen Werth die Determinante

$$\varDelta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 & \ldots 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{32} \ldots & a_{n3} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} \ldots & a_{n4} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

hat.

Durch Entwickelung von $\varDelta_1$ nach den Elementen der ersten Horizontalreihe erhält man

$$\varDelta_1 = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 & \ldots 0 \\ a_{23} & a_{33} & a_{43} & \ldots a_{n3} \\ a_{24} & a_{34} & & \ldots a_{n4} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_{2n} & a_{3n} & & \ldots a_{nn} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & 0 & 0 & \ldots 0 \\ a_{13} & a_{33} & a_{43} & \ldots a_{n3} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_{1n} & a_{3n} & a_{4n} & \ldots a_{nn} \end{vmatrix},$$

da die übrigen Glieder verschwinden. Ebenso folgt weiter

$$\Delta_1 = a_{11}\, a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{43} & \dots & a_{n3} \\ a_{34} & a_{44} & \dots & a_{n4} \\ \vdots & & & \\ a_{3n} & a_{4n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{21} \cdot a_{12} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{43} & \dots & a_{n3} \\ a_{34} & a_{44} & \dots & a_{n4} \\ \vdots & & & \\ a_{3n} & a_{4n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & a_{43} & \dots & a_{n3} \\ a_{34} & a_{44} & \dots & a_{n4} \\ \vdots & & & \\ a_{3n} & a_{4n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Sind die ersten drei Elemente jeder der drei ersten Horizontalreihen von 0 verschieden, die übrigen aber gleich 0, so zerlegt man die Determinante in drei Glieder und wendet auf jedes Glied den abgeleiteten Satz an, wodurch man erhält

$$\Delta_1 = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{44} & a_{54} & \dots & a_{n4} \\ a_{45} & a_{55} & \dots & a_{n5} \\ \vdots & & & \\ a_{4n} & a_{5n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$- a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{44} & a_{54} & \dots & a_{n4} \\ a_{45} & a_{55} & \dots & a_{n5} \\ \vdots & & & \\ a_{4n} & a_{5n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{44} & a_{54} & \dots & a_{n4} \\ a_{45} & a_{55} & \dots & a_{n5} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{4n} & a_{5n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{44} & a_{54} & \dots & a_{n4} \\ a_{45} & a_{55} & \dots & a_{n5} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{4n} & a_{5n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Nehmen wir nun an, der Satz sei für p^2 Elemente richtig; es sei also

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots a_{p1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \dots a_{p2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1p} & a_{2p} & \dots a_{pp} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{1p+1} & a_{2p+1} & \dots a_{p,p+1} & a_{p+1,p+1} & \dots & a_{n,p+1} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{pn} & a_{p+1,n} & & a_{nn} & \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{12}\, a_{21} \dots a_{p1} \\ \vdots \\ a_{1p}\, a_{2p} \dots a_{pp} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{p+1,p+1} \dots a_{n,p+1} \\ \vdots \\ a_{p+1,n} \quad \dots a_{nn} \end{vmatrix},$$

so zeigt man ihn leicht für $(p+1)^2$ Elemente. Es ist nämlich

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \dots a_{p1} & a_{p+1,1} & 0\,0\,0 \\ a_{12} & a_{22} \dots a_{p2} & a_{p+1,2} & 0\,0\,0 \\ \vdots & & & \\ a_{1,p+1} & a_{2,p+1}, a_{p,p+1} & a_{p+1,p+1} & 0\,0\,0 \\ a_{1,p+2} & \dots\dots\dots & & a_{np+2} \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & \dots\dots\dots & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\,\alpha_{11} + a_{21}\,\alpha_{21} + \dots + a_{p+1,1}\,\alpha_{p+1,1}.$$

Zerlegt man nun $\alpha_{11}, \alpha_{21} \dots, \alpha_{p+1}$ in Produkte, so ist

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{p+2,p+2}, \dots a_{n,p+2} \\ \vdots \\ a_{p+2,n} \quad \dots a_{nn} \end{vmatrix} \times \left\{ a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots a_{p+1,2} \\ \vdots & \\ a_{2,p+1} & \dots a_{p+1,p+1} \end{vmatrix} \right.$$

$$\left. - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \dots a_{p+1,2} \\ \vdots & \\ a_{1,p+1} & \dots a_{p+1,p+1} \end{vmatrix} \dots + (-1)^p a_{p+1} \begin{vmatrix} a_{12} & \dots a_{p,2} \\ \vdots & \\ a_{1,p+1} & \dots a_{p,p+1} \end{vmatrix} \right\}.$$

Daher ist schliesslich

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & \dots a_{p+1,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1,p+1}, & a_{2,p+1} & \dots a_{p+1,p+1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{p+2,p+2} \dots a_{n,p+2} \\ \vdots \\ a_{p+2,n} \quad \dots a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Der Satz ist bewiesen für 2^2 und 3^2 Elemente und gilt demnach allgemein. Wir sprechen ihn aus wie folgt:

Wenn alle Elemente, welche die ersten p Horizontalreihen und die letzten $(n-p)$ Vertikalreihen gemeinschaftlich haben, verschwinden, so zerfällt die Determinante in zwei Faktoren, von denen der erste die aus den ersten p Vertikal- und Horizontalreihen gebildete Determinante, der zweite die aus den $(n-p)$ letzten Horizontal- und Vertikalreihen gebildete Determinante ist.

Was hier für Horizontalreihen bewiesen ist, lässt sich auch für Vertikalreihen zeigen.

Kehrt man die erhaltene Formel um, so ergibt sich ein Gesetz für die Multiplikation der Determinanten.

Hat man eine Determinante $m$ten Grades mit einer anderen μten Grades zu multipliciren, so fügt man den Elementen der Horizontalreihen der ersten Determinante μ verschwindende, den Elementen der Vertikalreihen μ beliebige (auch verschwindende) Elemente hinzu und schiebt die zweite Determinante in die Lücke.

§ 56.

Multiplikationstheorem.

Ist

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \dots & b_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & & b_{nn} \end{vmatrix},$$

so ist nach dem Vorigen

$$A \cdot B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} & 0 & 0 & & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & & 0 \\ & & & & b_{11} & b_{21} & \dots & b_{n1} \\ & & & & b_{12} & b_{22} & \dots & b_{n2} \\ & & & & \vdots & & & \\ & & & & b_{1n} & b_{2n} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

wo in dem Quadrate rechts oben Nullen, in dem Quadrate links unten beliebige Elemente stehen. Den letzten Raum füllen wir in der Hauptdiagonale mit dem Elemente 1, in den übrigen Stellen mit 0 aus. Multipliciren wir nun die erste Horizontalreihe der b mit $-a_{11}$, die zweite mit $-a_{21}$, die dritte mit $-a_{31}, \ldots$ die $n$te mit $-a_{n1}$ und addiren wir diese Produkte zu den entsprechenden Elementen der ersten Horizontalreihe der a. Multipliciren wir ferner die erste Horizontalreihe der b mit $-a_{12}$, die zweite mit $-a_{22}, \ldots$ die $n$te mit $-a_{n2}$ und addiren alle diese Produkte zu den entsprechenden Elementen der zweiten Horizontalreihe der a u. s. f., so ändert sich dadurch die Determinante nicht, und man erhält:

$$AB =$$

$$\left|\begin{array}{llll}
0\ 0\ldots 0, & -a_{11}b_{11}-a_{21}b_{12}-\ldots-a_{n1}b_{1n}; & -a_{11}b_{21}\ldots-a_{n1}b_{2n}; & \ldots \\
0\ 0\ldots 0, & -a_{12}b_{11}-a_{22}b_{12}-\ldots-a_{n2}b_{1n}; & -a_{12}b_{21}\ldots-a_{n2}b_{2n}; & \ldots \\
\vdots & \vdots & & \\
0\ 0\ldots 0, & -a_{1n}b_{11}-a_{2n}b_{12}-\ldots-a_{nn}b_{1n}; & -a_{1n}b_{21}\ldots-a_{nn}b_{2n}; & \ldots \\
1\ 0\ldots 0, & b_{11}; & b_{21}; & \ldots \\
0\ 1\ldots 0, & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \\
0\ 0\quad 1, & b_{1n}; & b_{2n}; & \ldots
\end{array}\right|$$

Vertauschen wir alle Vertikalreihen $n$mal cyklisch, so wird, da $2n$ Reihen vorhanden sind, mit Benutzung von § 46 und § 55

$$AB = (-1)^{(2n-1)n} \times$$

$$\left|\begin{array}{lll}
-a_{11}b_{11}-a_{21}b_{12}-\ldots-a_{n1}b_{1n}; & -a_{11}b_{21}-\ldots-a_{n1}b_{2n}; & \ldots \\
-a_{12}b_{11}-a_{22}b_{12}-\ldots-a_{n2}b_{1n}; & -a_{12}b_{21}-\ldots-a_{n1}b_{2n}; & \ldots \\
\vdots & \vdots & \\
-a_{1n}b_{11}-a_{2n}b_{12}-\ldots-a_{nn}b_{1n}; & -a_{1n}b_{21}-\ldots-a_{nn}a_{2n}; & \ldots
\end{array}\right|$$

$2n-1$ ist stets ungerade; n dagegen gerade oder ungerade. Hebt man nun den Faktor (-1) aus jeder der n Horizontalreihen heraus, so wird in jedem Falle die ganze Determinante das positive Vorzeichen bekommen. Daher ist

$$AB =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12} + \ldots + a_{n1}b_{1n}; & a_{11}b_{21} + a_{21}b_{22} + \ldots + a_{n1}b_{2n}; \ldots \\ a_{12}b_{11} + a_{22}b_{12} + \ldots + a_{n2}b_{1n}; & a_{12}b_{21} + a_{22}b_{22} + \ldots + a_{n2}b_{2n}; \ldots \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ a_{1n}b_{11} + a_{2n}b_{12} + \ldots + a_{nn}b_{1n}; & a_{1n}b_{21} + a_{2n}b_{22} + \ldots + a_{nn}b_{2n}; \ldots \end{vmatrix}.$$

Diese Formel enthält das sogenannte Multiplikationstheorem, welches das Fundament der Determinantenlehre bildet. Wir sprechen es kurz auf folgende Weise aus:

Es ist

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} & \ldots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} & \ldots & c_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ c_{1n} & c_{2n} & c_{3n} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} & \ldots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \ldots & b_{n2} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ b_{1n} & b_{2n} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

unter der Voraussetzung, dass

$$c_{k\lambda} = a_{1\lambda}b_{k1} + a_{2\lambda}b_{k2} + a_{3\lambda}b_{k3} + \ldots + a_{n\lambda}b_{kn}$$

ist.

In unserer Form sind alle Elemente einer Horizontalreihe der Determinante A mit allen Elementen einer Vertikalreihe von B multiplicirt und die Produkte addirt. Vertauscht man in B die Horizontalreihen mit den Vertikalreihen, so bilden die b_k eine Horizontalreihe. Man kann daher auch alle Elemente einer Horizontalreihe in A mit den Elementen einer Horizontalreihe in B multipliciren und addiren. Aehnliches gilt von den Vertikalreihen der A, so dass sich vier Darstellungsarten ergeben. Man muss in jedem einzelnen Falle durch eine vorläufige Ueberlegung die zweckmässigste Darstellungsart zu ermitteln suchen.

* Wir halten es nicht für überflüssig, von dem vorgetragenen Theoreme noch einen Beweis vorzuführen, den wir an ein Beispiel anschliessen. Die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21} + a_{31}b_{31}; & a_{11}b_{12} + a_{21}b_{22} + a_{31}b_{32}; & a_{11}b_{13} + a_{21}b_{23} + a_{31}b_{33} \\ a_{12}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{32}b_{31}; & a_{12}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{32}b_{32}; & a_{12}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{32}b_{33} \\ a_{13}b_{11} + a_{23}b_{21} + a_{33}b_{31}; & a_{13}b_{12} + a_{23}b_{22} + a_{33}b_{32}; & a_{13}b_{13} + a_{23}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{vmatrix}$$

zerfällt in die Summe von 27 einfacheren Determinanten, die man erhält, wenn man je ein Glied einer Reihe mit je einem der anderen Vertikalreihen combinirt.

Diese Summe ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} b_{11}; & a_{11} b_{12}; & a_{11} b_{13} \\ a_{12} b_{11}; & a_{12} b_{12}; & a_{12} b_{13} \\ a_{13} b_{11}; & a_{13} b_{12}; & a_{13} b_{13} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} b_{11}; & a_{21} b_{22}; & a_{11} b_{13} \\ a_{12} b_{11}; & a_{22} b_{22}; & a_{12} b_{13} \\ a_{13} b_{11}; & a_{23} b_{22}; & a_{13} b_{13} \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} b_{11}; & a_{21} b_{22}; & a_{31} b_{33} \\ a_{12} b_{11}; & a_{22} b_{22}; & a_{32} b_{33} \\ a_{13} b_{11}; & a_{23} b_{22}; & a_{33} b_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} b_{11}; & a_{31} b_{32}; & a_{21} b_{23} \\ a_{12} b_{11}; & a_{32} b_{32}; & a_{22} b_{23} \\ a_{13} b_{11}; & a_{33} b_{32}; & a_{23} b_{23} \end{vmatrix} + \cdots$$

Schreibt man in allen Gliedern die gleichen Faktoren b einer Reihe vor die Determinante, so sieht man, dass die beiden ersten Glieder verschwinden, weil ihre Determinanten gleiche parallele Reihen haben. In dem vierten Gliede muss man noch die dritte und zweite Vertikalreihe vertauschen. So erhält man

$$b_{11} b_{22} b_{33} \begin{vmatrix} a_{11} a_{21} a_{31} \\ a_{12} a_{22} a_{32} \\ a_{13} a_{23} a_{33} \end{vmatrix} - b_{11} b_{33} b_{23} \begin{vmatrix} a_{11} a_{21} a_{31} \\ a_{12} a_{22} a_{32} \\ a_{13} a_{23} a_{33} \end{vmatrix} + \cdots$$

Bezeichnet man in jeder Vertikalreihe der gegebenen Determinante die Reihenfolge der Glieder mit 1 2 3, so sieht man, dass Combinationen derselben Nummern verschwindende Determinanten erzeugen, Combinationen mit durchaus verschiedenen Nummern aber die Determinante aus den Elementen der a gemeinschaftlich haben, während die Summe der andern Faktoren die Determinante der b liefert. — Dieser Beweis gilt nun auch für mehr als 3^2 Elemente.

§ 57.

Folgerungen.

Der Gang unserer Ableitung des Multiplikationstheorems würde derselbe gewesen sein, wenn die beiden Determinanten, deren Produkt gebildet werden soll, nicht von demselben Grade gewesen wären. Wir ziehen es jedoch vor, solche Multiplikationen mit Hülfe des Endresultates jener Untersuchung auszuführen. Hat man z. B.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}$$

und

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{vmatrix},$$

so setzt man nach § 52

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} & 0 & 0 \\ b_{12} & b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

und multiplicirt nach der Hauptregel. Es wird

$$A \cdot B = \begin{vmatrix} a_{11} b_{11} + a_{21} b_{21}; & a_{11} b_{12} + a_{21} b_{22}; & a_{31}; & a_{41} \\ a_{12} b_{11} + a_{22} b_{21}; & a_{12} b_{12} + a_{22} b_{22}; & a_{32}; & a_{42} \\ a_{13} b_{11} + a_{23} b_{21}; & a_{13} b_{12} + a_{23} b_{22}; & a_{33}; & a_{43} \\ a_{14} b_{11} + a_{24} b_{21}; & a_{14} b_{12} + a_{24} b_{22}; & a_{34}; & a_{44} \end{vmatrix}.$$

2) Multiplicirt man nach dem Multiplikationstheoreme mehrere Determinanten mit einander, so ist der Grad der das Produkt darstellenden Determinante gleich dem der Determinante vom höchsten Grade.

3) Erweiterung des Multiplikationstheorems.

Stellt man durch das Symbol

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \end{vmatrix}$$

die Summe

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{21} & b_{31} \\ b_{22} & b_{32} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{31} & b_{11} \\ a_{32} & b_{12} \end{vmatrix}$$

dar, so erhält man

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} c_{11} + a_{21} c_{21} + a_{31} c_{31}; & a_{11} c_{12} + a_{21} c_{22} + a_{31} c_{32} \\ a_{12} c_{11} + a_{22} c_{21} + a_{32} c_{31}; & a_{12} c_{12} + a_{22} c_{22} + a_{32} c_{32} \end{vmatrix}.$$

§ 58.

Beispiele.

1) Verwandle

$$\begin{vmatrix} x & y & z & w \\ y & x & w & z \\ z & w & x & y \\ w & z & y & x \end{vmatrix}$$

in ein Produkt.

Antwort:

$$(x+y+z+w)(x+y-z-w)(x-y+z-w)(x-y-z+w).$$

Vgl. § 54.

2) Ebenso

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}.$$

Antwort:

$$-(x+y+z)(x+y-z)(x-y-z)(-x+y-z).$$

3) Ferner

$$\begin{vmatrix} -x & y & z & w \\ y & -x & w & z \\ z & w & -x & y \\ w & z & y & -x \end{vmatrix}.$$

Antwort:

$$-(x+y+z-w)(x+y-z+w)(x-y+z+w)$$
$$(-x+y+z+w).$$

4)
$$\begin{vmatrix} u_1^2 & u_2^2 & u_3^2 \\ u_1 v_1 & u_2 v_2 & u_3 v_3 \\ v_1^2 & v_2^2 & v_3^2 \end{vmatrix} = u_1^2 u_2^2 u_3^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{v_1}{u_1} & \frac{v_2}{u_2} & \frac{v_3}{u_3} \\ \left(\frac{v_1}{u_1}\right)^2 & \left(\frac{v_2}{u_2}\right)^2 & \left(\frac{v_3}{u_3}\right)^2 \end{vmatrix}$$

$$= - u_1^2 u_2^2 u_3^2 \left(\frac{v_1}{u_1} - \frac{v_2}{u_2}\right)\left(\frac{v_1}{u_1} - \frac{v_3}{u_3}\right)\left(\frac{v_2}{u_2} - \frac{v_3}{u_3}\right)$$

$$= -(v_1 u_2 - u_1 v_2)(v_1 u_3 - u_1 v_3)(v_2 u_3 - u_2 v_3).$$

$$5)\;\begin{vmatrix} 1; & u_1 + a_0; & u_1^2 + b_1 u_1 + b_0; & u_1^3 + c_2 u_1^2 + c_1 u_1 + c_0 \\ 1; & u_2 + a_0; & u_2^2 + b_1 u_2 + b_0; & u_2^3 + c_2 u_2^2 + c_1 u_2 + c_1 \\ 1; & u_3 + a_0; & u_3^2 + b_1 u_3 + b_0; & u_3^3 + c_2 u_3^2 + c_1 u_3 + c_0 \\ 1; & u_4 + a_0; & u_4^2 + b_1 u_4 + b_0; & u_4^3 + c_2 u_4^2 + c_1 u_4 + c_0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & u_1 & u_1^2 & u_1^3 \\ 1 & u_2 & u_2^2 & u_2^3 \\ 1 & u_3 & u_3^2 & u_3^3 \\ 1 & u_4 & u_4^2 & u_4^3 \end{vmatrix} = (u_1 - u_2)(u_1 - u_3)(u_1 - u_4) \times (u_2 - u_3)(u_2 - u_4)(u_3 - u_4).$$

Erläuterung. Man zerlegt die erste Determinante nach § 49, 2), und findet, dass alle mit Ausnahme der hingeschriebenen verschwinden, weil sie in zwei parallelen Reihen übereinstimmen. Auf die letzte Determinante wird § 54 3) angewandt.

$$6)\;\begin{vmatrix} 1 & u_1 & u_1^3 \\ 1 & u_2 & u_2^3 \\ 1 & u_3 & u_3^3 \end{vmatrix} = (u_1 - u_2)(u_2 - u_3) \begin{vmatrix} 0; & 1; & u_1^2 + u_1 u^2 + u_2^2 \\ 0; & 1; & u_2^2 + u_2 u_3 + u_3^2 \\ 1; & u_3; & u_3^3 \end{vmatrix}$$

$$= (u_1 - u_2)(u_2 - u_3) \begin{vmatrix} 1; & u_1^2 + u_1 u_2 + u_2^2 \\ 1; & u_2^2 + u_2 u_3 + u_3^2 \end{vmatrix}$$

$$= (u_1 - u_2)(u_2 - u_3)(u_3 - u_1) \begin{vmatrix} 1; & u_1^2 + u_1 u_2 + u_2^2 \\ 0; & u_1 + u_2 + u_3 \end{vmatrix}$$

$$= (u_1 - u_2)(u_2 - u_3)(u_3 - u_1)(u_1 + u_2 + u_3).$$

Erläuterung. Es wurde von der ersten Horizontalreihe die zweite, von der zweiten die dritte subtrahirt und gleichzeitig die dadurch erhaltenen Faktoren herausgesetzt. Auf die zweite Determinante wird der Satz § 52 angewandt. In der dritten wurde von der zweiten Horizontalreihe die erste subtrahirt und der gleiche Faktor vorgesetzt. Schliesslich wurde wieder § 52 angewandt.

$$7)\;\begin{vmatrix} 1 & y_1^2 & y_1^3 \\ 1 & y_2^2 & y_2^3 \\ 1 & y_3^2 & y_3^3 \end{vmatrix} = (y_1 - y_2)(y_2 - y_3) \begin{vmatrix} y_1 + y_2; & y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2 \\ y_2 + y_3; & y_2^2 + y_2 y_3 + y_3^2 \end{vmatrix}$$

$$= (y_1 - y_2)(y_2 - y_3)(y_3 - y_1) \begin{vmatrix} y_1 + y_2; & y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2 \\ 1; & y_1 + y_2 + y_3 \end{vmatrix}$$

$$= (y_1 - y_2)(y_2 - y_3)(y_3 - y_1) \begin{vmatrix} 0; & -y_1 y_2 - y_2 y_3 - y_3 y_1 \\ 1; & y_1 + y_2 + y_3 \end{vmatrix}$$

$$= (y_1 - y_2)(y_2 - y_3)(y_3 - y_1)(y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_1).$$

Erläuterung. Die zweite Horizontalreihe der vorletzten Determinante wurde mit $y_1 + y_2$ multiplicirt und von der ersten subtrahirt. Die übrigen Umformungen sind dem Beispiele 6) analog; nur wurden sofort zwei Operationen zusammengezogen, die dort getrennt blieben.

8) Bei einer wichtigen geometrischen Untersuchung (Collineation von Punktreihen) stösst man auf die Gleichung

$$\varDelta_1 = \begin{vmatrix} xx'; & x; & x' \\ x_1 x_1'; & x_1; & x_1' \\ x_2 x_2'; & x_2; & x_2' \end{vmatrix} = 0.$$

Diese soll ohne Determinante ausgedrückt werden.

$$\varDelta_1 = \begin{vmatrix} xx'; & 0 & 0 \\ x_1 x_1'; & x_1 x' - x_1 x_1'; & x x_1' - x_1 x_1' \\ x^2 x_2'; & x_2 x' - x_2 x_2'; & x x_2' - x_2 x_2' \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{xx'} =$$

$$\begin{vmatrix} x_1 x' - x_1 x_1'; & x x_1' - x_1 x_1' \\ x_2 x' - x_2 x_2'; & x x_2' - x_2 x_2' \end{vmatrix} =$$

$$x_1 \cdot x_2' (x' - x_1')(x - x_2) - x_1' \cdot x_2 (x - x_1)(x' - x_2') = 0.$$

$$\frac{x_1}{x_1 - x} : \frac{x_2}{x_2 - x} = \frac{x_1'}{x_1' - x'} : \frac{x_2'}{x_2' - x'}.$$

Erläuterung. Es wurde die zweite Vertikalreihe mit x', die dritte mit x multiplicirt und von diesen die erste subtrahirt. Die Proportion erhält man, wenn man mit dem Produkte der vier Differenzen dividirt, und die so erhaltene Produktengleichung verwandelt.

9)
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{vmatrix}$$

nach dem Multiplikationstheoreme zu berechnen.

Antwort:

$$\begin{vmatrix} a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21} + a_{31}x_{31}; & a_{11}x_{12} + a_{21}x_{22} + a_{31}x_{32}; & a_{11}x_{13} + a_{21}x_{23} + a_{31}x_{33} \\ a_{12}x_{11} + a_{22}x_{21} + a_{32}x_{31}; & a_{12}x_{12} + a_{22}x_{22} + a_{32}x_{32}; & a_{12}x_{13} + a_{22}x_{23} + a_{32}x_{33} \\ a_{13}x_{11} + a_{23}x_{21} + a_{33}x_{31}; & a_{13}x_{12} + a_{23}x_{22} + a_{33}x_{32}; & a_{13}x_{13} + a_{23}x_{23} + a_{33}x_{33} \end{vmatrix}.$$

Anmerkung. Combinire zur Uebung auch nach den drei anderen Arten.

10)
$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 1 & a_2 & b_2 \\ 1 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

(Vertikal- mit Horizontalreihen.)

Antwort:
$$\begin{vmatrix} 3; & x_1 + x_2 + x_3; & y_1 + y_2 + y_3 \\ a_1 + a_2 + a_3; & a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3; & a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 \\ b_1 + b_2 + b_3; & b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3; & b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3 \end{vmatrix}.$$

11) Beweise, dass
$$\begin{vmatrix} Aa_{11} + Ba_{21}; & Aa_{21} + Ba_{22}; & Aa_{31} + Ba_{32} \\ a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{vmatrix} = 0 \text{ ist.}$$

Anmerkung. Entweder durch Zerlegung, oder durch Multiplikation der zweiten und dritten Horizontalreihe mit je einem Faktor und Subtraktion von der ersten.

12) Wie gross ist
$$\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ -a & 1 & c \\ -b & -c & 1 \end{vmatrix}?$$

Antwort: $1 + a^2 + b^2 + c^2$. (Durch Ausrechnen.)

13) Bilde
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}^2.$$

Antwort:
$$\begin{vmatrix} a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2; & a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32}; & a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} \\ a_{12}a_{11} + a_{22}a_{21} + a_{32}a_{31}; & a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2; & a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} \\ a_{13}a_{11} + a_{23}a_{21} + a_{33}a_{31}; & a_{13}a_{12} + a_{23}a_{22} + a_{33}a_{32}; & a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 \end{vmatrix}.$$

Anmerkung. Beachte die Gleichheit der entsprechenden Glieder in homologen Horizontal- und Vertikalreihen (Symmetrie).

14) Berechne

$$\begin{vmatrix} 1; & 3x_1 - 2; & 2x_1^2 - 5x_1 + 1 \\ 1; & 3x_2 - 2; & 2x_2^2 - 5x_2 + 1 \\ 1; & 3x_3 - 2; & 2x_3^2 - 5x_3 + 1 \end{vmatrix}.$$

Antwort: $2 \cdot 3\,(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$.

Vergleiche Beispiel 5.

16) Stelle

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

als eine Determinante dar.

Antwort:
$$\begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{21}x_2; & a_{11}y_1 + a_{21}y_2; & a_{31} \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2; & a_{12}y_1 + a_{22}y_2; & a_{32} \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2; & a_{13}y_1 + a_{23}y_2; & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Vergl. § 57.

Anmerkung. Durch Multiplikation der Horizontalreihen der ersten mit den Vertikalreihen der zweiten erhält man

$$\begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{21}y_1; & a_{11}x_2 + a_{21}y_2; & a_{31} \\ a_{12}x_1 + a_{22}y_1; & a_{12}x_2 + a_{22}y_2; & a_{32} \\ a_{13}x_1 + a_{23}y_1; & a_{13}x_2 + a_{23}y_2; & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Beweise die Identität dieser Resultate durch Zerlegung beider Determinanten.

17) Man denke den zweiten Faktor der vorigen Aufgabe ersetzt durch

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 0 \\ y_1 & y_2 & 0 \\ z_1 & z_2 & 1 \end{vmatrix}$$

und multiplicire. Das Resultat ist

$$P = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{21}x_2; & a_{11}y_1 + a_{21}y_2; & a_{11}z_1 + a_{21}z_2 + a_{31} \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2; & a_{12}y_1 + a_{22}y_2; & a_{12}z_1 + a_{22}z_2 + a_{32} \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2; & a_{13}y_1 + a_{23}y_2; & a_{13}z_1 + a_{23}z_2 + a_{33} \end{vmatrix}.$$

Es soll gezeigt werden, dass diese Determinante mit dem Resultate in 16) identisch ist.

Erläuterung. Man zerlege die letzte Determinante nach den Gliedern der letzten Vertikalreihe in drei Determinanten

(§ 49, 2). Die letzte derselben ist das Resultat in 16). Hebt man in der ersten z_1 heraus, multiplicirt mit x_1 und subtrahirt von der ersten Vertikalreihe, multiplicirt mit y_1 und subtrahirt von der zweiten, hebt x_2 und y_2 heraus, so zeigen sich gleiche parallele Reihen. Diese Determinante verschwindet. Ebenso bei der zweiten.

Uebrigens beachte man, dass, wenn man P in zwei Determinanten zerlegt, wovon die erste als letzte Vertikalreihe $a_{11} z_2 + a_{21} z_2$ etc. enthält, diese erste Determinante aus den Systemen

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ und } \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}$$

so gebildet ist, als wenn das zweite System ebenfalls eine Determinante wäre, die man durch eine Reihe 0 vervollständigt hat, um dann die Multiplikation auszuführen. Da nun das zweite System 0 ist, so ist auch das Produkt 0.

18) Behandle nach beiden in 17) angedeuteten Methoden

$$\begin{vmatrix} a_{11} b_{11} + a_{21} b_{21}; & a_{11} b_{12} + a_{21} b_{22}; & a_{11} b_{13} + a_{21} b_{22} \\ a_{12} b_{11} + a_{22} b_{21}; & a_{12} b_{12} + a_{22} b_{22}; & a_{12} b_{13} + a_{22} b_{23} \\ a_{13} b_{11} + a_{23} b_{21}; & a_{13} b_{12} + a_{23} b_{22}; & a_{13} b_{13} + a_{23} b_{23} \end{vmatrix}.$$

19) Bilde

$$\begin{vmatrix} x; & y; & z \\ x_1; & y_1; & z_1 \\ x_2; & y_2; & z_2 \end{vmatrix}^2.$$

Antwort:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2; & xx_1 + yy_1 + zz_1; & xx_2 + yy_2 + zz_2 \\ x_1 x + y_1 y + z_1 z; & x_1^2 + y_1^2 + z_1^2; & x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \\ x_2 x + y_2 y + z_2 z; & x_2 x_1 + y_2 y_1 + z_2 z_1; & x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 \end{vmatrix}.$$

Anmerkung. Beachte die Symmetrie der Elemente.

20) Beweise, dass

$$\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2; & x_1 x_2 + y_1 y_2; & x_1 x_3 + y_1 y_3 \\ x_1 x_2 + y_1 y_2; & x_2^2 + y_2^2; & x_2 x_3 + y_2 y_3 \\ x_1 x_3 + y_1 y_3; & x_2 x_3 + y_2 y_3; & x_3^2 + y_3^2 \end{vmatrix} = 0 \text{ ist.}$$

Antwort: Diese Determinante ist gleich

$$\begin{vmatrix} x_1; & y_1; & 0 \\ x_2; & y_2; & 0 \\ x_3; & y_3; & 0 \end{vmatrix}^2,$$

also nach § 52 = 0.

21) Berechne

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$$

durch Ausrechnen.

Antwort: $2\,abc.$

22) Bei der Untersuchung von Dreiecken in der Ellipse ist zu berechnen

$$P = \begin{vmatrix} \frac{x_1}{a}; & \frac{y_1}{b}; & 1 \\ \frac{x_2}{a}; & \frac{y_2}{b}; & 1 \\ \frac{x_3}{a}; & \frac{y_3}{b}; & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{x_1}{a}; & \frac{y_1}{b}; & -1 \\ \frac{x_2}{a}; & \frac{y_2}{b}; & -1 \\ \frac{x_3}{a}; & \frac{y_3}{b}; & -1 \end{vmatrix}$$

unter der Voraussetzung, dass $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 = 0$ und $\frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{b^2} - 1 = -\frac{1}{2}\frac{C_2}{b_3^2}$ ist und ähnlich für die anderen Indices. Die Rechnung ist auszuführen.

Antwort:

$$P = \begin{vmatrix} 0; & -\frac{1}{2}\frac{C^2}{b_3^2}; & -\frac{1}{2}\frac{B^2}{b_2^2} \\ -\frac{1}{2}\frac{C^2}{b_3^2}; & 0; & -\frac{1}{2}\frac{A^2}{b_1^2} \\ -\frac{1}{2}\frac{B^2}{b_2^2}; & -\frac{1}{2}\frac{A^2}{b_1^2}; & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{8} \cdot \frac{A^2 B^2 C^2}{b_1^2 b_2^2 b_3^2}.$$

Man beachte dabei Beispiel 21) und § 49, 1.

23) Es soll

$$S^2 = (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\alpha_1 - \alpha_3)^2 (\alpha_1 - \alpha_4)^2 \times$$
$$(\alpha_2 - \alpha_3)^2 (\alpha_2 - \alpha_4)^2 \times$$
$$(\alpha_3 - \alpha_4)^2$$

als Determinante ausgedrückt werden.

Antwort: Nach § 54 ist

$$S = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \alpha_1^3 \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \alpha_2^3 \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 & \alpha_3^3 \\ 1 & \alpha_4 & \alpha_4^2 & \alpha_4^2 \end{vmatrix};$$

also ist auch

$$S^2 =$$

$$\begin{vmatrix} 1\ +1\ +1\ +1; & \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4; & \alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2; & \alpha_1^3+\alpha_2^3+\alpha_3^3+\alpha_4^3 \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4; & \alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2; & \alpha_1^3+\alpha_2^3+\alpha_3^3+\alpha_4^3; & \alpha_1^4+\alpha_2^4+\alpha_3^4+\alpha_4^4 \\ \alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2; & \alpha_1^3+\alpha_2^3+\alpha_3^3+\alpha_4^3; & \alpha_1^4+\alpha_2^4+\alpha_3^4+\alpha_4^4; & \alpha_1^5+\alpha_2^5+\alpha_3^5+\alpha_4^5 \\ \alpha_1^3+\alpha_2^3+\alpha_3^3+\alpha_4^3; & \alpha_1^4+\alpha_2^4+\alpha_3^4+\alpha_4^4; & \alpha_1^5+\alpha_2^5+\alpha_3^5+\alpha_4^5; & \alpha_1^6+\alpha_2^6+\alpha_3^6+\alpha_4^6 \end{vmatrix}.$$

Es wurden hier Vertikalreihen mit einander multiplicirt.
Man setzt nun

$$s_0 = \alpha_1^0 + \alpha_2^0 + \alpha_3^0 + \alpha_4^0; \quad s_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4;$$
$$s_2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2; \text{ u. s. f.}$$

Hiermit wird

$$S^2 = \begin{vmatrix} s_0; & s_1; & s_2; & s_3 \\ s_1; & s_2; & s_3; & s_4 \\ s_2; & s_3; & s_4; & s_5 \\ s_3; & s_4; & s_5; & s_6 \end{vmatrix}.$$

Anmerkung. Beachte die Reihenfolge der Indices.

24) Beweise, dass allgemein für n Grössen α

$$S^2 = \begin{vmatrix} s_0; & s_1; & s_2 & \ldots s_{n-1} \\ s_1; & s_2; & s_3 & \ldots s_n \\ s_2; & s_3; & s_4 & \ldots s_{n+1} \\ \vdots & & & \\ s_{n-1}; & s_n; & s_{n+1} & \ldots s_{2n-2} \end{vmatrix}$$

ist.

Anmerkung. Diese beiden Beispiele sind für die Theorie der symmetrischen Funktionen der Wurzeln einer Gleichung von Bedeutung.

25) Wir haben früher § 53, 21) eine Determinante entwickelt, die wir jetzt weiter behandeln wollen.

Wir setzen

$$\begin{vmatrix} A - x; & B_2; & B_1 \\ B_2; & A_1 - x; & B \\ B_1; & B; & A_2 - x \end{vmatrix} = 0.$$

Wenn diese Gleichung durch eine complexe Grösse

$$x = a + bi$$

befriedigt werden soll, so muss sein

$$\begin{vmatrix} A - a - bi; & B_2; & B_1 \\ B_2; & A_1 - a - bi; & B \\ B_1; & B; & A_2 - a - bi \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathfrak{A} - bi; & B_2; & B_1 \\ B_2; & \mathfrak{A}_1 - bi; & B \\ B_1; & B; & \mathfrak{A}_2 - bi \end{vmatrix} = 0.$$

In diesen Determinanten sind alle Grössen ausser bi reell. Um nun zu zeigen, dass die vorgelegte Gleichung keine complexen Wurzeln hat, brauchen wir nur zu beweisen, dass sie durch keine imaginären Wurzeln befriedigt wird.

Bilden wir das Produkt

$$P = \begin{vmatrix} A - x; & B_2; & B_1 \\ B_2; & A_1 - x; & B \\ B_1; & B; & A_2 - x \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A + x; & B_2; & B_1 \\ B_2; & A_1 + x; & B \\ B_1; & B; & A_2 + x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} L - x^2; & M_2; & M_1 \\ M_2; & L_1 - x^2; & M \\ M_1; & M; & L_2 - x^2 \end{vmatrix} = 0,$$

so muss jeder Werth von x, welcher die gegebene Gleichung befriedigt, auch diese befriedigen. Hierbei ist

$$\begin{aligned} L &= A^2 + B_2^2 + B_1^2; & M &= B_1 B_2 + B\,(A_1 + A_2) \\ L_1 &= A_1^2 + B_2^2 + B^2; & M_1 &= B_2 B + B_1(A_2 + A) \\ L_2 &= A_2^2 + B_1^2 + B^2; & M_2 &= B\,B_1 + B_2(A + A_1). \end{aligned}$$

Durch Entwickelung der Determinante erhält man wie früher

$$0 = -x^6 + x^4(L + L_1 + L_2)$$
$$- x^2(L_1 L_2 - M^2 + L_2 L - M_1^2 + L L_1 - M_2) + E,$$

wo

$$E = \begin{vmatrix} L; & M_2; & M_1 \\ M_2; & L_1; & M \\ M_1; & M; & L_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A; & B_2; & B_1 \\ B_2; & A_1; & B \\ B_1; & B; & A_2 \end{vmatrix}^2 = D^2$$

ist.

Alle Coefficienten sind positiv; denn erstens ist

$$E = D^2 > 0,$$

zweitens ist

$$G = L + L_1 + L_2 = A_2^2 + A_1^2 + A^2 + 2(B^2 + B_1^2 + B_2^2) > 0,$$

drittens kann dasselbe von F, dem Coefficienten von $-x^2$ gezeigt werden. Denn

$$L_1 L_2 - M^2 = (A_1^2 + B_2^2 + B^2)(B_1^2 + B^2 + A_1^2)$$
$$-(B_1 B_2 + A_1 B + B A_2)^2$$
$$= (A_1 A_2 - B^2)^2 + (B B_1 - B_2 A_2)^2 + (B_2 B - B_1 A_1)^2.$$

Ebenso für die anderen Grössen in F, so dass man schliesslich erhält

$$F = (A_1 A_2 - B^2)^2 + (A_2 A - B_1^2)^2 + (A A_1 - B_2^2)^2$$
$$+ 2\{(B B_1 - B_2 A_2)^2 + (B_2 B - B_1 A_1)^2 + (B_1 B_2 - B A)^2\} > 0.$$

In der Gleichung

$$-x^6 + x^4 G - x^2 F + E = 0$$

sind also alle Grössen E, F, G positiv. Setzen wir nun $x = bi$, so wird

$$b^6 + G b^4 + F b^2 + E = 0,$$

was aber nicht möglich ist, da positive Grössen nicht Null als Summe haben können.

Es sind also alle Wurzeln der gegebenen Gleichung reell.

26) Welchen Werth hat

$$\begin{vmatrix} u_1; & u_1^2; & u_1^3 \\ u_2; & u_2^2; & u_2^3 \\ u_3; & u_3^2; & u_3^3 \end{vmatrix} ?$$

Antwort: $-u_1 u_2 u_3 \cdot (u_1 - u_2)(u_1 - u_3)(u_2 - u_3)$.

Erläuterung. Die erste Horizontalreihe dividirt man durch u_1, die zweite durch u_2, die dritte durch u_3.

27) In der Lehre von den Involutionen kommt man auf die Gleichung:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1; & u_1 + v_1; & u_1 v_1 \\ 1; & u_2 + v_2; & u_2 v_2 \\ 1; & u_3 + v_3; & u_3 v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Determinante soll behandelt werden.

Antwort: Nennt man

$$\begin{vmatrix} u_1^2; & -u_1; & 1 \\ u_2^2; & -u_2; & 1 \\ u_3^2; & -u_3; & 1 \end{vmatrix}$$

D, so hat man

$$D = (u_1 - u_2)(u_1 - u_3)(u_2 - u_3).$$

Man muss die letzte Vertikalreihe mit der ersten vertauschen, um die gewünschte Form zu haben.

Ferner ist

$$D \cdot \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0; & (u_2-u_1)(u_2-v_1); & (u_3-u_1)(u_3-v_1) \\ (u_1-u_2)(u_1-v_2); & 0; & (u_3-u_2)(u_3-v_2) \\ (u_1-u_3)(u_1-v_3); & (u_2-u_3)(u_2-v_3); & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (u_2-u_1)(u_2-v_1)(u_3-u_2)(u_3-v_2)(u_1-u_3)(u_1-v_3)$$
$$+ (u_3-u_1)(u_3-v_1)(u_1-u_2)(u_1-v_2)(u_2-u_3)(u_2-v_3).$$

Also ist

$$\Delta_1 = -(u_1-v_2)(u_2-v_3)(u_3-v_1) - (v_1-u_2)(v_2-u_3)(v_3-u_1).$$

28) Behandele nach § 54

$$\begin{vmatrix} a; & x; & x; & x; & x \\ x; & b; & x; & x; & x \\ x; & x; & c; & x; & x \\ x; & x; & x; & d; & x \\ 1; & 1; & 1; & 1; & 1 \end{vmatrix}.$$

Resultat: $(a-x)(b-x)(c-x)(d-x)$.

Erläuterung. Man multiplicirt die fünfte Horizontalreihe mit x und subtrahirt sie der Reihe nach von den übrigen.

§ 59.

Coefficient des Produktes zweier Elemente.

Wir wollen die Eigenschaften, welche bis jetzt gewonnen sind, verallgemeinern und verschiedene Entwickelungen der Determinanten ableiten. Wie wir früher von dem Coefficienten eines Elementes ausgingen, so soll hier zunächst der Coefficient von zwei Elementen $a_{k\lambda} \cdot a_{i\mu}$ in der Entwickelung der Determinante festgestellt werden.

Der Coefficient von $a_{k\lambda} \cdot a_{i\mu}$ sei X; dann ist $a_{i\mu} \cdot X$ ein Glied des Coefficienten des Elementes $a_{k\lambda}$; also hat man $a_{i\mu}\, X$, als den $a_{i\mu}$ enthaltenen Theil in der Entwickelung von $\alpha_{k\lambda}$, wo $\alpha_{k\lambda}$ dadurch aus der gegebenen Determinante hervorgeht, dass die λte Horizontal- und die $k$te Vertikalreihe ausgelassen und das Zeichen festgestellt wird.

Die Frage nach dem Faktor X ist also auf die bekannte nach dem Faktor von $a_{i\mu}$ in der Determinante $\alpha_{k\lambda}$ zurückgeführt. Dieser wird der Grösse nach gefunden, indem man die Horizontal- und Vertikalreihe, worin $a_{i\mu}$ steht, weglässt.

Aus der Originaldeterminante wird also X abgeleitet durch Weglassung der Horizontal- und Vertikalreihen, worin $a_{k\lambda}$ und $a_{i\mu}$ stehen.

Welches Vorzeichen hat dieser Coefficient? Wir nehmen an, es sei $\lambda < \mu$, $i < k$. Die Determinante $\alpha_{k\lambda}$ ist nun nach § 51 mit dem Vorzeichen $(-1)^{\lambda+k}$ zu versehen. In $\alpha_{k\lambda}$ bringen wir durch Vertauschung von je zwei parallelen Reihen $a_{i\mu}$ an die erste Stelle. Hierzu sind $i-1$ Vertauschungen von je zwei Vertikalreihen nöthig, jedoch nur $\mu - 2$ Vertauschungen von je zwei Horizontalreihen, da die λte Horizontalreihe fortgefallen ist. Also hat die Determinante X das Vorzeichen

$$(-1)^{\lambda+k+i+\mu-3} = (-1)^{\lambda+k+i+\mu-1}.$$

Anmerkung. Man mache sich die Ableitung an dem Schema klar:

1 2 i $i+1$ $k-2$ $k-1$ k

1, 2, λ, $\lambda+1$, μ, $\mu+1$

Die Reihen sind durch Linien angedeutet. Die Reihen k und λ fehlen während der zweiten Operation.

Hiernach bekommt man unter der Voraussetzung $\lambda < \mu; i < k$:

$$X = (-1)^{\lambda+k+\mu+i-1} \times$$

$$\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{21} & \cdots a_{i-1,1} & a_{i+1,1} & \cdots a_{k-1,1} & a_{k+1,1} & \cdots a_{n,1} \\
a_{12} & a_{22} & \cdots a_{i-1,2} & a_{i+1,2} & \cdots a_{k-1,2} & a_{k+1,2} & \cdots a_{n,2} \\
\vdots & & & & & & \vdots \\
a_{1,\lambda-1} & a_{2,\lambda-1} & \cdots a_{i-1,\lambda-1} & a_{i+1,\lambda-1} & \cdots a_{k-1,\lambda+1} & a_{k+1,\lambda-1} & \cdots a_{n,\lambda-1} \\
a_{1,\lambda+1} & a_{2,\lambda+1} & \cdots a_{i-1,\lambda+1} & a_{i+1,\lambda+1} & \cdots a_{k-1,\lambda-1} & a_{k+1,\lambda+1} & \cdots a_{n,\lambda+1} \\
\vdots & & & & & & \vdots \\
a_{1,\mu-1} & a_{2,\mu-1} & \cdots a_{i-1,\mu-1} & a_{i+1,\mu-1} & \cdots a_{k-1,\mu-1} & a_{k+1,\mu-1} & \cdots a_{n,\mu-1} \\
a_{1,\mu+1} & a_{2,\mu+1} & \cdots a_{i-1,\mu-1} & a_{i+1,\mu+1} & \cdots a_{k-1,\mu+1} & a_{k+1,\mu+1} & \cdots a_{n,\mu+1} \\
\vdots & & & & & & \vdots \\
a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots a_{i-1,n} & a_{i+1,n} & \cdots a_{k-1,n} & a_{k+1,n} & \cdots a_{n,n}
\end{vmatrix}$$

§ 60.

Vergleichung des Coefficienten von $a_{k\lambda} \cdot a_{i\mu}$ mit dem von $a_{i\lambda} \cdot a_{k\mu}$.

Aus der Originaldeterminante sind nach dem vorigen Paragraphen die $i$te und $k$te Vertikal-, die λte und μte Horizontalreihe herausgefallen. Diese beiden Reihenpaare schliessen ein Rechteck ein. An den Endpunkten einer Diagonale befinden sich die Elemente $a_{k\lambda} \cdot a_{i\mu}$. Dieselben Reihen würden fortgefallen sein, wenn man den Faktor des Produkts der Elemente an den Endpunkten der andern Diagonale gesucht hätte. Das Produkt jener Elemente ist $a_{i\lambda} \cdot a_{k\mu}$. Demnach ist der absolute Werth des Coefficienten von $a_{k\lambda} \cdot a_{i\mu}$ gleich dem absoluten Werthe des Coefficienten von $a_{i\lambda} \cdot a_{k\mu}$. Nach dem Vorigen hat der Coefficient von $a_{k\lambda} \cdot a_{i\mu}$ das Vorzeichen

$$(-1)^{\lambda+k+\mu+i-1}.$$

Welches Vorzeichen hat der Coefficient von $a_{i\lambda} \cdot a_{k\mu}$? Verfährt man genau so wie im vorigen Abschnitte, so findet man

$$(-1)^{\lambda+i} \cdot (-1)^{k-2} \cdot (-1)^{\mu-2} = (-1)^{\lambda+i+k+\mu}.$$

Die beiden betrachteten Coefficienten haben also entgegengesetzte Vorzeichen.

Das Resultat sprechen wir als Satz aus:

Vertauscht man zwei entsprechende Indices zweier Elemente, so ändert der Coefficient nur sein Vorzeichen.

*Praktische Regel: Stehen die Elemente in der Diagonale von links oben nach rechts unten, so ist der Exponent die Summe der Indices, sonst diese vermindert um 1.

§ 61.

Unterdeterminanten und ihre Complemente.

Bezeichnen wir den Werth der als ein Coefficient von $a_{i\lambda}\, a_{k\mu}$ auftretenden Determinante mit X, so ist, unter der Voraussetzung $i < k$, $\lambda < \mu$, der Coefficient von $a_{i\lambda}\, a_{k\mu}$

$$(-1)^{\lambda+i+\mu+k} \cdot X,$$

der Coefficient von

$$a_{k\lambda} \cdot a_{i\mu} \text{ hingegen } -(-1)^{\lambda+k+\mu+i} \cdot X.$$

Also ist der Coefficient von $(a_{i\lambda} \cdot a_{k\mu} - a_{k\lambda} \cdot a_{i\mu})$

$$(-1)^{\lambda+k+\mu+i} \cdot X.$$

Nun ist

$$a_{i\lambda}\, a_{k\mu} - a_{k\lambda}\, a_{i\mu} = \begin{vmatrix} a_{i\lambda} & a_{k\lambda} \\ a_{i\mu} & a_{k\mu} \end{vmatrix}$$

eine Unterdeterminante 2ten Grades. X ist eine Unterdeterminante $(n-2)$ten Grades, die keine Reihen enthält, welche Elemente der ersten Unterdeterminante liefern.

Man nennt $(-1)^{\lambda+k+\mu+i}\, X$ und $\begin{vmatrix} a_{i\lambda} & a_{k\lambda} \\ a_{i\mu} & a_{k\mu} \end{vmatrix}$ complementäre Determinanten.

* Um ein wichtiges Princip zu erörtern, wollen wir das gewonnene Resultat auf anderem Wege ableiten: Diejenigen Glieder der Originaldeterminante, welche $a_{i\lambda}\, a_{k\mu} - a_{k\lambda}\, a_{i\mu}$ als Faktor enthalten, haben kein anderes Element aus den 4 Reihen, denen diese Elemente angehören, aber aus jeder andern noch je ein Element. Der Coefficient von $\begin{vmatrix} a_{i\lambda} & a_{k\lambda} \\ a_{i\mu} & a_{k\mu} \end{vmatrix}$ wird daher nicht geändert, welchen Werth man auch den übrigen Elementen der erwähnten Reihen beilegt. Wir lassen sie daher verschwinden. Hiermit ist die Frage nach dem Coefficienten von $P = \begin{vmatrix} a_{i\lambda} & a_{k\lambda} \\ a_{i\mu} & a_{k\mu} \end{vmatrix}$ in der Originaldeterminante

zurückgeführt auf die Frage nach dem Coefficienten von P in der Determinante:

$$\Delta_2 =$$

$$\left|\begin{matrix}
a_{11} & a_{21} \ldots & a_{i-1,1}; & 0; a_{i+1,1} \ldots & a_{k-1,1}; & 0; a_{k+1,1} & \ldots a_{n1} \\
a_{12} & a_{22} \ldots & a_{i-1,2}; & 0; a_{i+1,2} \ldots & a_{k-1,2}; & 0; a_{k+1,2} & \ldots a_{n2} \\
\vdots & & & & & & \vdots \\
a_{1,\lambda-1} & a_{2,\lambda-1} \ldots & a_{i-1,\lambda} & a_{i\lambda}; 0; \ldots 0; & 0; & a_{k\lambda}; & 0; \\
a_{1,\lambda+1} & a_{2,\lambda+1} \ldots & a_{i-1,\lambda+1}; & 0; a_{i+1,\lambda+1} \ldots & a_{k-1,\lambda+1}; & 0; a_{k+1,\lambda+1} & \ldots a_{n,\lambda+1} \\
\vdots & & & & & & \vdots \\
0; \; 0; & 0; \; 0; & & a_{i\mu}; \; 0; & 0; & a_{k\mu}; & 0 \\
a_{1,\mu+1} & \ldots & & 0; a_{i+1,\mu+1} \ldots & \ldots & 0; a_{k+1,\mu+1} & \ldots a_{n,\mu+1} \\
\vdots & & & & & & \vdots \\
a_{1n} & a_{2n} \ldots & & 0; a_{i+1,n} \ldots & a_{k-1,n} & 0; & \ldots a_{nn}
\end{matrix}\right|$$

In Δ_2 vertauschen wir die λte Horizontalreihe mit der $\lambda - 1$, dann mit der $\lambda - 2, \ldots$ schliesslich mit der ersten; dadurch werden $\lambda - 1$ Zeichenwechsel veranlasst. Nun vertauschen wir die μte mit der $\mu - 1$, dann mit der $\mu - 2, \ldots$ schliesslich mit der zweiten. So sind $\mu - 2$ Zeichenwechsel herbeigeführt. Ebenso verfahren wir mit der $i$ten und $k$ten Vertikalreihe; es entstehen hierbei

$$i - 1 + k - 2$$

Zeichenwechsel.

Im Ganzen entstehen also

$$\lambda + \mu + i + k - 6$$

Zeichenwechsel. Demnach hat man

$$\Delta_2 = (-1)^{\lambda+\mu+i+k} \times$$

$$\left|\begin{matrix}
a_{i\lambda} & a_{k\lambda}; & 0 & 0 & 0 \ldots 0 \\
a_{i\mu} & a_{k\mu}; & 0 & 0 & 0 \ldots 0 \\
0 & 0 & a_{11} & a_{21} \ldots a_{i-1,1} & a_{i+1,1} \ldots a_{k-1,1} \; a_{k+1,1} \ldots a_{n1} \\
0 & 0 & a_{12} & a_{12} \ldots a_{i-1,2} & a_{i+1,2} \ldots a_{k-1,2} \; a_{k+1,2} \ldots a_{n1} \\
0 & 0 & a_{1,\lambda-1} \ldots & & \\
0 & 0 & a_{1,\lambda+1} \ldots & & \\
0 & 0 & a_{1,\mu-1} \ldots & & \\
0 & 0 & a_{1,\mu+1} \ldots & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & &
\end{matrix}\right|.$$

Nach den Resultaten in § 55 ist nun

$$\Delta_2 = (-1)^{\lambda+k+i+\mu} \begin{vmatrix} a_{i\lambda} & a_{k\lambda} \\ a_{i\mu} & a_{k\mu} \end{vmatrix} \times$$

$$\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{21} & \dots a_{i-1,1} & a_{i+1,1} & \dots a_{k-1,1} & a_{k+1,1} & \dots a_{n1} \\
a_{12} & a_{22} & \dots a_{i-1,2} & a_{i+1,2} & \dots a_{k-1,2} & a_{k+1,2} & \dots a_{n2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{1,\lambda-1} & a_{2,\lambda-1} \dots & a_{i-1,\lambda-1} & a_{i+1,\lambda-1} \dots & a_{k-1,\lambda-1} & a_{k+1,\lambda-1} \dots & a_{n,\lambda-1} \\
a_{1,\lambda+1} & a_{2,\lambda+1} \dots & a_{i-1,\lambda+1} & a_{i+1,\lambda+1} \dots & a_{k-1,\lambda+1} & a_{k+1,\lambda+1} \dots & a_{n,\lambda+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{1,\mu-1} & a_{2,\mu-1} \dots & a_{i-1,\mu-1} & a_{i+1,\mu-1} \dots & a_{k-1,\mu-1} & a_{k+1,\mu-1} \dots & a_{n,\mu-1} \\
a_{1,\mu+1} & a_{1,\mu+1} \dots & a_{i-1,\mu+1} & a_{i+1,\mu+1} \dots & a_{k-1,\mu+1} & a_{k+1,\mu+1} \dots & a_{n,\mu+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n1} & a_{2,n} & \dots a_{i-1,n} & a_{i+1,n} & \dots a_{k-1,n} & a_{k+1,n} & \dots a_{nn}
\end{vmatrix}.$$

Nennen wir die zweite Determinante auf der rechten Seite Q, so ist der Faktor von P

$$(-1)^{\lambda+k+i+\mu} \,.\, Q.$$

Anmerkung. Nach dieser Methode lassen sich die erhaltenen Resultate leicht verallgemeinern.

§ 62.

Zerlegung der Determinante in eine Summe von Produkten je zweier Elemente.

Wie wir früher die Determinanten in eine Summe von Gliedern nach den Elementen einer Reihe entwickelt haben, so wollen wir hier die Determinanten nach den Elementen von zwei parallelen Reihen entwickeln. Um die Ableitung anschaulich zu machen, gehen wir von einem Beispiele aus. Es soll die Determinante

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} = \sum \pm a_{11}\, a_{22}\, a_{33}\, a_{44}$$

nach den ersten beiden Horizontalreihen abgeleitet werden.

Um $\Sigma \pm a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}$ darzustellen, muss man die Elemente aus je einer Vertikalreihe nehmen in der Folge der Horizontalreihen. Man kann also nehmen $a_{11} a_{22}$ mit $a_{21} a_{12}$ $a_{11} a_{32}$ mit $a_{31} a_{12}$, $a_{11} a_{42}$ mit $a_{41} a_{12}$, da wir die Faktoren je zweier solcher Glieder schon kennen. Für a_{21} bleiben noch übrig: $a_{21} a_{32}$ mit $a_{31} a_{22}$; $a_{21} a_{42}$ mit $a_{41} a_{22}$, weil $a_{21} a_{12}$ schon genommen war. Ebenso haben wir $a_{31} a_{42}$ mit $a_{41} a_{32}$. Hiermit sind alle möglichen Verbindungen der beiden ersten Horizontalreihen erschöpft. Multipliciren wir daher jede dieser Verbindungen mit dem ihr zukommenden Coefficienten und addiren, so erhalten wir alle Glieder der Originaldeterminante. Man erhält aber auch alle Glieder nur einmal, weil die Glieder sich wenigstens durch die beiden ersten Elemente unterscheiden. Man hat also

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & a_{43} \\ a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} \\ a_{12} & a_{32} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{23} & a_{43} \\ a_{24} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{41} \\ a_{12} & a_{42} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{23} & a_{33} \\ a_{24} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{22} & a_{32} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{13} & a_{43} \\ a_{14} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{41} \\ a_{22} & a_{42} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{13} & a_{33} \\ a_{14} & a_{34} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{31} & a_{41} \\ a_{32} & a_{42} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{13} & a_{23} \\ a_{14} & a_{24} \end{vmatrix}.$$

Die Vorzeichen der einzelnen Glieder bestimmt man nach der Zeichenregel § 61.

* Wir geben für dieses Theorem einen zweiten leichteren Beweis. Nach Früherem ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{41} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{vmatrix}.$$

Jedes dieser vier Produkte entwickelt man wieder nach den Elementen der ersten Horizontalreihe und vereinigt dann die Glieder mit gleichem Faktor, nämlich das erste Glied des ersten Produktes mit dem ersten des zweiten; das zweite des ersten mit dem ersten des dritten; das dritte des ersten mit dem ersten des vierten, — das zweite des zweiten mit dem zweiten des dritten, das dritte des zweiten mit dem zweiten des vierten; endlich das dritte Glied des dritten Produktes mit dem vierten Gliede des vierten Produktes. So erhält man die gegebene Form.

Wäre eine Determinante $n$ten Grades gegeben, so würde man ebenfalls die Vertikalreihen zu zweien ohne Wiederholung combiniren, aus jeder dieser Combinationen die beiden ersten Horizontalreihen wählen, jede entstandene Determinante mit der complementären multipliciren und die erhaltenen Produkte addiren.

Das Verfahren, welches man einzuschlagen hat, um nach $3, 4, 5 \ldots p$ parallelen Reihen zu entwickeln, ergibt sich aus dem vorigen von selbst: Man combinirt im letzten Falle je p Vertikalreihen ohne Wiederholung, wählt die p Horizontalreihen aus jeder Combination aus, multiplicirt mit der complementären Determinante und addirt die Produkte.

§ 63.

Folgerung.

1) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{32} & a_{42} \\ a_{33} & a_{43} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} \\ a_{12} & a_{32} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{42} \\ a_{23} & a_{43} \end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{41} \\ a_{12} & a_{42} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{22} & a_{32} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{42} \\ a_{13} & a_{43} \end{vmatrix}$$
$$- \begin{vmatrix} a_{21} & a_{41} \\ a_{22} & a_{42} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{31} & a_{41} \\ a_{32} & a_{42} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} = 0;$$

denn die linke Seite ist gleich

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \end{vmatrix},$$

also gleich 0, da diese Determinante zwei gleiche Parallelreihen hat.

§ 64.

Entwickelung nach den Elementen der ersten Horizontal- und Vertikalreihe.

Wir wählen das Beispiel

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Entwickeln wir diese Determinante Δ_1 nach den Elementen der ersten Horizontalreihe, so wird

$$\Delta_1 = a_{11}\,\alpha_{11} + a_{21}\,\alpha_{21} + a_{31}\,\alpha_{31} + a_{41}\,\alpha_{41}.$$

Die Determinanten α_{21}, α_{31}, α_{41} entwickeln wir nach den Elementen der ersten Vertikalreihe; hiermit geht Δ_1 über in

$$a_{11}\,\alpha_{11} - a_{21}\,a_{12}\begin{vmatrix} a_{33} & a_{43} \\ a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{21}\,a_{13}\begin{vmatrix} a_{32} & a_{42} \\ a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{21}\,a_{14}\begin{vmatrix} a_{32} & a_{42} \\ a_{33} & a_{43} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{31}\,a_{12}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{43} \\ a_{24} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{31}\,a_{13}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{42} \\ a_{24} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{31}\,a_{14}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{42} \\ a_{23} & a_{43} \end{vmatrix}$$

$$- a_{41}\,a_{12}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{33} \\ a_{24} & a_{34} \end{vmatrix} + a_{41}\,a_{13}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{24} & a_{34} \end{vmatrix} - a_{41}\,a_{14}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

wo die Vorzeichen nach § 60 bestimmt sind. Dieses Resultat kann man kürzer schreiben:

$$\Delta_1 = a_{11}\,\alpha_{11} - \sum_{2}^{4}{}^{\lambda\mu}\, a_{\lambda 1}\, a_{1\mu}\, \beta_{\lambda\mu},$$

wenn man mit $\beta_{\lambda k}$ diejenige Unterdeterminante bezeichnet, welche $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{\lambda 1} \\ a_{1\mu} & a_{\lambda\mu} \end{vmatrix}$ complementär ist, und wenn man λ und k allmälig alle Werthe von 2 bis 4 gibt. Das Minuszeichen muss genommen werden, weil die Elemente $a_{\lambda 1} \cdot a_{1\mu}$ auf der Diagonale von rechts oben nach links unten stehen.

Es ist klar, dass dieselbe Entwickelung allgemein für n Elemente gültig ist; wir können daher schreiben

$$\Delta_1 = a_{11}\,\alpha_{11} - \sum_{2}^{n} a_{\lambda 1}\,a_{1\mu}\,\beta_{\lambda\mu}.$$

§ 65.

Entwickelung nach einer beliebigen Horizontal- und Vertikalreihe.

Soll Δ_1 nach den Elementen der ϱten Vertikal- und der σten Horizontalreihe entwickelt werden, so vertauscht man so lange je zwei parallele Reihen, bis die ϱte Vertikalreihe und die σte Horizontalreihe resp. zur ersten Vertikal- und zur ersten Horizontalreihe geworden sind. Hierdurch geht Δ_1 in Δ_2 über, wo

$$1) \qquad \Delta_1 = (-1)^{\varrho+\sigma}\,\Delta_2$$

ist.

Ferner ist

$$2) \qquad \Delta_2 = a_{\varrho\sigma}\,A_{\varrho\sigma} - \sum_{1}^{n}{}^{\lambda\mu}\, a_{\lambda\sigma}\,a_{\varrho\mu}\,\mathfrak{B}_{\lambda\mu},$$

wo sich die Summation für λ nicht auf ϱ, für μ nicht auf σ erstrecken darf, und wo $A_{\varrho\sigma}$ durch Weglassung der ersten Vertikal- und Horizontalreihe aus Δ_2 entsteht, während $\mathfrak{B}_{\lambda\mu}$ aus derselben Determinante durch Weglassung dieser Reihen und derjenigen hervorgeht, welche die Elemente $a_{\lambda\sigma}$ und $a_{\varrho\mu}$ enthalten, wenn ausserdem das Vorzeichen nach §§ 59, 60 und 61 bestimmt wird.

Bezeichnet man diese Determinante ohne Vorzeichen mit $X_{\lambda\mu}$, so ist für

3) $\lambda < \varrho$, und $\mu < \sigma$

oder $\lambda > \varrho$, und $\mu > \sigma$;

$$\mathfrak{B}_{\lambda\mu} = (-1)^{\lambda+\mu}\,X_{\lambda\mu};$$

hingegen ist für

4) $\lambda < \varrho$ und $\mu > \sigma$

oder $\lambda > \varrho$ und $\mu < \sigma$

$$\mathfrak{B}_{\lambda\mu} = (-1)^{\lambda+\mu+1} X_{\lambda\mu}.$$

Aus der Determinante Δ_1 ergibt sich unter der Bedingung 3) als Coefficient von $a_{\lambda\sigma} a_{\varrho\mu}$

5) $$B_{\lambda\mu} = (-1)^{\varrho+\sigma+\lambda+\mu} X_{\lambda\mu},$$

und im Falle 4)

6) $$B_{\lambda\mu} = (-1)^{\varrho+\sigma+\lambda+\mu+1} X_{\lambda\mu}.$$

Da nun ausserdem

7) $$\alpha_{\varrho\sigma} = (-1)^{\varrho+\sigma} A_{\varrho\sigma}$$

ist, so folgt aus 1)

8) $$\Delta_1 = a_{\varrho\sigma}\,\alpha_{\varrho\sigma} - \sum_1^n{}^{\lambda\mu} a_{\lambda\sigma}\, a_{\varrho\mu}\, B_{\lambda\mu},$$

wo die Summation für λ sich nicht über ϱ, die Summation für μ sich nicht über σ erstrecken darf.

Anmerkung. Man mache sich diese Ableitungen durch ein Schema klar.

Ist die gegebene Determinante vom $n$ten Grade und entwickelt man nach den Elementen der letzten Horizontal- und Vertikalreihen, so gehen alle jene Diagonalen von rechts oben nach links unten. Daher gilt hier immer das Zeichen —; es braucht nur noch $B_{\lambda\mu}$ mit seinem Vorzeichen nach § 61 festgestellt zu werden.

§ 66.

Entwickelung nach den Elementen des Anfangsgliedes.

In § 61 haben wir eine zweite Ableitung des dort in Frage kommenden Theorems gegeben. Das Prinzip derselben soll nun weiter von uns angewandt werden, nachdem wir vorher seine Bedeutung an einigen Beispielen erörtert haben.

In § 51 suchten wir den Coefficienten von $a_{\lambda k}$. Wir leiten ihn jetzt auf folgende Art ab. Alle Glieder in der Entwickelung der gegebenen Determinante, welche das Element $a_{\lambda k}$ enthalten, haben kein anderes Element der λten Vertikal- und der $k$ten Horizontalreihe. Diese kann man daher gleich Null setzen. Für $a_{\lambda k}$ kann man 1 setzen, da dadurch der Werth jenes Coefficienten nicht geändert wird.

So findet man

$$\alpha_{\lambda k} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots a_{\lambda-1,1}, & 0, a_{\lambda+1,1} & \ldots a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots a_{\lambda-1,2}, & 0, a_{\lambda+1,2} & \ldots a_{n2} \\ \vdots & & & & \\ a_{1,k-1} & a_{2,k-1} & \ldots a_{\lambda-1,k-1}, & 0, a_{\lambda+1,k-1} & \ldots a_{n,k-1} \\ 0, & 0, & 0, & 1, 0 & \ldots 0 \\ a_{1,k+1} & a_{2,k+1} & \ldots a_{\lambda-1,k+1}, & 0, a_{\lambda+1,k+1} & \ldots a_{n,k+1} \\ \vdots & & & & \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \ldots a_{\lambda-1,n} & 0, a_{\lambda+1,n} & \ldots a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Durch dieselbe Schlussweise findet man den Coefficienten von $a_{i\lambda} \cdot a_{k\mu}$ gegeben durch

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots a_{i-1,1}, & 0, a_{i+1,1} & \ldots a_{k-1,1}, & 0, a_{k+1,1} & \ldots a_{n,1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots a_{i-1,2}, & 0, a_{i+1,2} & \ldots a_{k-1,2}, & 0, a_{k+1,2} & \ldots a_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\;\vdots & \vdots & \vdots\;\vdots & \vdots \\ a_{1,\lambda-1} & a_{2,\lambda-1} & \ldots a_{i-1,\lambda-1}, & 0, a_{i+1,\lambda-1} & \ldots a_{k-1,\lambda-1}, & 0, a_{k+1,\lambda-1} & \ldots a_{n,\lambda-1} \\ 0 & 0 & \ldots 0 & 1, 0 & \ldots 0 & 0, 0 & \ldots 0 \\ a_{1,\lambda+1} & a_{2,\lambda+1} & \ldots a_{i-1,\lambda+1}, & 0, a_{i+1,\lambda+1} & \ldots a_{k-1,\lambda+1}, & 0, a_{k+1,\lambda+1} & \ldots a_{n,\lambda+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\;\vdots & \vdots & \vdots\;\vdots & \vdots \\ a_{1,\mu-1} & a_{2,\mu-1} & \ldots a_{i-1,\mu-1}, & 0, a_{i+1,\mu-1} & \ldots a_{k-1,\mu-1}, & 0, a_{k+1,\mu-1} & \ldots a_{n,\mu-1} \\ 0 & 0 & \ldots 0 & 0, 0 & \ldots 0 & 1, 0 & \ldots 0 \\ a_{1,\mu+1} & a_{2,\mu+1} & \ldots a_{i-1,\mu+1}, & 0, a_{i+1,\mu+1} & \ldots a_{k-1,\mu+1}, & 0, a_{k+1,\mu+1} & \ldots a_{n,\mu+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\;\vdots & \vdots & \vdots\;\vdots & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \ldots a_{i-1,n}, & 0, a_{i+1,n} & \ldots a_{k-1,n}, & 0, a_{k+1,n}, & \ldots a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Diese Art der Betrachtung lässt sich nun anwenden, nach welchen Elementen die Determinante auch entwickelt werden soll. Wir wählen die Entwickelung nach den Elementen der Diagonale, weil diese sehr häufig vorkommt. Zugleich soll ein Beispiel die concrete Grundlage unserer Schlüsse sein, die sich dann leicht verallgemeinern lassen.

Es sei

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Wird die Determinante entwickelt, so erhält man im Ganzen 24 Glieder. Von diesen enthalten einige kein Glied der Diagonale, z. B. $+ a_{21} a_{12} a_{43} a_{34}$, einige ein Element der Diagonale, z. B. $+ a_{21} a_{42} a_{33} a_{14}$; einige zwei Elemente, wie $- a_{31} a_{22} a_{13} a_{44}$; ein Glied vier Elemente.

Um das Glied zu erhalten, welches kein Element der Diagonale hat, braucht man die Elemente dieser Diagonale nur gleich Null zu setzen. Es gibt von den Gliedern, welche nur ein Element der Diagonale enthalten, solche mit a_{11}, solche mit a_{22}, mit a_{33} und a_{44}. Alle Glieder mit nur einem dieser Elemente, z. B. a_{22}, erhält man, wenn man die übrigen Elemente der Diagonale $= 0$ setzt und die Elemente der entsprechenden Vertikal- und Horizontalreihe verschwinden lässt. Der Coefficient von a_{22} ergibt sich, wenn man ausserdem für a_{22} 1 schreibt. Diese Determinante nennen wir D_2; die entsprechenden für a_{11}, a_{33} und a_{44} sollen mit D_1, D_3, D_4 bezeichnet werden, so dass z. B.

$$D_3 = \begin{vmatrix} 0 & a_{21} & 0 & a_{41} \\ a_{12} & 0 & 0 & a_{42} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_{14} & a_{24} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

ist, während

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & 0 & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & 0 \end{vmatrix}$$

ist.

Den Verein aller Glieder mit je einem Elemente der Diagonale können wir durch

$$+ \sum_1^4{}^k a_{kk} D_k$$

darstellen, wo für k nach und nach alle Zahlen von 1 bis 4 genommen und die so entstandenen Glieder addirt werden sollen.

Von den Gliedern mit je zwei Elementen der Diagonale haben einige $a_{11}\ a_{22}$, andere $a_{11}\ a_{33}$, noch andere $a_{11}\ a_{44}$. Ferner kommen solche vor mit $a_{22}\ a_{33}$; $a_{22}\ a_{44}$; $a_{33}\ a_{44}$.

Man muss also die Combinationen der zweiten Classe ohne Wiederholung bilden. Eines dieser Glieder z. B. $a_{11}\ a_{44}$ hat den Coefficienten

$$D_{14} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{32} & 0 \\ 0 & a_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Die Summe dieser Glieder kann man schreiben:

$$+\sum_1^4 a_{kk}\, a_{\lambda\lambda}\, D_{k\lambda};$$

für $k\lambda$ müssen hier alle Combinationen zweiter Classe der Zahlen 1, 2, 3, 4 ohne Wiederholung genommen werden.

Glieder mit nur je drei Elementen der Diagonale gibt es nicht, denn ein solches mit $a_{11}\ a_{33}\ a_{44}$ würde z. B. den Coefficienten haben

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

der verschwindet.

Fügen wir gleichwohl der Symmetrie wegen diese Glieder hinzu, so erhalten wir:

$$\Delta_1 = D + \sum_1^4 a_{kk}\, D_k + \sum_1^4 a_{kk}\, a_{\lambda\lambda}\, D_{k\lambda}$$

$$+ \sum_1^4 a_{kk}\, a_{\lambda\lambda}\, a_{\mu\mu}\, D_{k\lambda\mu} + a_{11}\, a_{22}\, a_{33}\, a_{44}\,.$$

Allgemein ist für eine Determinante $n$ten Grades

$$\Delta_1 = D + \sum_1^n a_{kk}\, D_k + \sum_1^n a_{kk}\, a_{\lambda\lambda}\, D_{k\lambda}$$

$$+ \sum_1^n a_{kk}\, a_{\lambda\lambda}\, a_{\mu\mu}\, D_{k\lambda\mu} + \sum_1^n a_{kk}\, a_{\lambda\lambda}\, a_{\mu\mu}\, a_{\nu\nu}\, D_{k\lambda\mu\nu}$$

$$+ \ldots + a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn}\,.$$

§ 67.

Fortsetzung.

Die Elemente der Diagonale der gegebenen Determinante sollen Summen aus zwei Gliedern sein; nach dem zweiten Gliede dieser Elemente soll entwickelt werden. Wir nehmen wieder als Beispiel eine Determinante 4ten Grades, nämlich

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} + A_1; & a_{12}; & a_{31}; & a_{41} \\ a_{12}; & a_{22} + A_2; & a_{32}; & a_{42} \\ a_{13}; & a_{23}; & a_{33} + A_3; & a_{43} \\ a_{14}; & a_{24}; & a_{34}, & a_{44} + A_4 \end{vmatrix},$$

welche nach den Gliedern A_1, A_2, A_3, A_4 der Elemente der Diagonalreihe zu entwickeln ist.

Wir stellen dieselbe in der Form dar

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} + A_1; & a_{21} + 0; & a_{31} + 0; & a_{41} + 0 \\ a_{12} + 0; & a_{22} + A_2; & a_{32} + 0; & a_{42} + 0 \\ a_{13} + 0; & a_{23} + 0; & a_{33} + A_3; & a_{43} + 0 \\ a_{14} + 0; & a_{24} + 0; & a_{34} + 0; & a_{44} + A_4 \end{vmatrix}.$$

Da hier jedes Element jeder Vertikalreihe aus zwei Gliedern besteht, so lässt sich diese Determinante in eine Summe von 16 Determinanten zerlegen (§ 49, 2). Eine dieser Determinanten entsteht dadurch, dass man das erste Glied der Elemente jeder Vertikalreihe wählt.

Vier Determinanten haben eine Vertikalreihe mit A, während die übrigen kein A enthalten. Eine von diesen 4 Determinanten, z. B. diejenige, welche A_3 enthält, nämlich

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & 0 & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & 0 & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & A_3 & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = A_3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & 0 & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & 0 & a_{42} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_{14} & a_{24} & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$$

s. § 66 den Anfang. Setzen wir den Faktor von A_3 gleich D_3, und ähnlich bei A_1, A_2, A_4, so können wir den aus diesen 4 Determinanten bestehenden Theil

$$A_1 D_1 + A_2 D_2 + A_3 D_3 + A_4 D_4 = \sum_1^4 a_\mu D_\mu$$

setzen. Sechs jener Determinanten haben zwei Vertikalreihen mit A, während die übrigen kein A enthalten. Davon hat eine A_1 und A_2, eine A_1 und A_3, ferner A_1 und A_4; dann A_2 und A_3, A_2 und A_4, A_3 und A_4.

Eine von diesen 6 Determinanten, z. B. die mit den Vertikalreihen A_2 und A_4, nämlich

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{31} & 0 \\ a_{12} & A_2 & a_{32} & 0 \\ a_{13} & 0 & a_{33} & 0 \\ a_{14} & 0 & a_{34} & A_4 \end{vmatrix} \text{ ist gleich } A_2 A_4 \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{31} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{13} & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Die Determinante dieses Produktes nennen wir D_{24}. Dann hat man

$$A_1 A_2 D_{12} + A_1 A_3 D_{13} + A_1 A_4 D_{14} + A_2 A_3 D_{23} + A_2 A_4 D_{24} + A_3 A_4 D_{34} = \sum_1^4 A_\mu D_\nu D_{\mu\nu}$$

als den Theil der Determinante, welcher je zwei A enthält. Hierbei muss man für $\mu\nu$ alle Combinationen zweiter Classe ohne Wiederholung der Elemente 1, 2, 3, 4 setzen.

Vier der Determinanten enthalten je drei Vertikalreihen mit A, nämlich $A_1 A_3 A_3$, $A_1 A_2 A_4$, $A_1 A_3 A_4$, $A_2 A_3 A_4$. Bilden wir, wie vorhin, die Faktoren dieser Elemente und setzen z. B. den Faktor von $A_1 A_3 A_4$ gleich D_{134}, so liefern diese vier Determinanten

$$\sum_1^4 A_\mu A_\nu A_0 D_{\mu\nu 0},$$

wo für $\mu\nu 0$ alle Combinationen zur dritten Classe ohne Wiederholung zu setzen sind.

Endlich bleibt noch übrig

$$\begin{vmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_4 \end{vmatrix} = A_1 A_2 A_3 A_4.$$

Somit darf man setzen:

$$\Delta_1 = D + \sum_1^4 A_\mu D_\mu + \sum_1^4 A_\mu A_\nu D_{\mu\nu} \sum_1^4 A_\mu A_\nu A_0 D_{\mu\nu 0} + A_1 A_2 A_3 A_4.$$

Dieselbe Betrachtung lässt sich bei einer Determinante $n$ten Grades anwenden, wodurch man

$$\varDelta_2 = D + \sum_1^n A_\mu D_\mu + \sum_1^n A_\mu A_\nu D_{\mu\nu} + \dots$$
$$+ A_1 A_2 \dots A_n$$

erhält.

§ 68.

Folgerung.

1)
$$\begin{vmatrix} x & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & x & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & x & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & x \end{vmatrix}$$
$$= D + x \sum_1^4 D_\mu + x^2 \sum_1^4 D_{\mu\nu} + x^3 \sum_1^4 D_{\mu\nu o} + x^4,$$

wo das Glied mit x^3 übrigens verschwindet.

Sind also die Elemente der Diagonale gleich, so kann man die Determinante nach Potenzen dieses Elementes entwickeln.

2)
$$\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22}+x & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}+x & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44}+x \end{vmatrix}$$
$$= D + x \sum_1^4 D_\mu + x^2 \sum_1^4 D_{\mu\nu} + x^3 \sum_1^4 D_{\mu\nu o} + x^4.$$

§ 69.

Aufgaben.

1) Wie heisst in der Determinante

$$\begin{vmatrix} 1; & \cos\alpha; & \cos\beta \\ \cos\alpha; & 1; & \cos\gamma \\ \cos\beta; & \cos\gamma; & 1 \end{vmatrix}$$

der Coefficient von $\cos^2\gamma$?

Antwort: $-1.$

Erläuterung. $\cos\gamma$ steht auf der Diagonale von rechts oben nach links unten; die Indices würden sein 3, 2; 2, 3, deren Summe gerade ist; also muss man das negative Vorzeichen nehmen. Um den absoluten Werth zu erhalten, lässt man die zweite und dritte Verticalreihe und die zweite und dritte Horizontalreihe aus.

2) Wie heisst in derselben Determinante der Coefficient von $\cos\alpha \cos\beta$?

Antwort: $2\cos\gamma$; denn $\cos\alpha \cos\beta$ ist das Produkt des dritten Elementes der ersten Horizontalreihe und dem ersten Elemente der zweiten. Daher hat es den Faktor $\cos\gamma$. Ferner ist $\cos\alpha \cos\beta$ das Produkt aus dem zweiten Element der ersten Horizontalreihe und dem ersten der zweiten. Für dieses Produkt findet man wieder den Coefficienten $\cos\gamma$. Also im Ganzen $2\cos\gamma$.

3) Gegeben ist

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x_1 & x_2 & x_3 \\ y & y_1 & y_2 & y_3 \\ z & z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Gieb den Faktor von $x_3 z$ an.

Antwort:
$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = y_2 - y_1.$$

Siehe § 60.

4) Welchen Coefficienten hat in derselben Determinante $x z_3$?

Antwort:
$$-(y_2 - y_1).$$

5) Gieb den Coefficienten von $\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix}$ in derselben Determinante an.

Antwort:
$$+\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y & y_2 \end{vmatrix} = y_2 - y.$$

6) Entwickele die Determinante in 3) nach den Elementen der beiden ersten Horizontalreihen.

Antwort:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & x_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & x_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & x_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y & y_3 \\ z & z_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y & y_2 \\ z & z_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_2 & x_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y & y_1 \\ z & z_1 \end{vmatrix}.$$

Siehe § 62.

7) Die Determinante $\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ -x & 0 & a & b \\ -y & c & 0 & d \\ -z & e & f & 0 \end{vmatrix}$

soll nach den Elementen der ersten Horizontal- und Vertikalreihe entwickelt werden.

Antwort: $dfx^2 - xy\,(bf + de) - xz\,(ad + cf) + y^2be$
$- yz\,(bc + ae) + z^2ac.$

8) Entwickele $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 0 \\ 0 & x_1 & x_2 \\ y_1^2 & 2y_1y_2 & y_2^2 \end{vmatrix}$

nach den Elementen der Diagonale.

Antwort: $x_2^2y_1^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + x_1^2y_2^2 = (x_2y_1 - x_1y_2)^2.$

9) Es ist gegeben $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{vmatrix}.$

Gieb das Complement von $\begin{vmatrix} a_2 & a_5 \\ d_2 & d_5 \end{vmatrix}$ an.

Antwort: $+\begin{vmatrix} b_1 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_3 & c_4 \\ e_1 & e_3 & e_4 \end{vmatrix}.$

10) Welchen Werth hat in derselben Determinante das Complement von $\begin{vmatrix} c_2 & c_4 \\ d_2 & d_4 \end{vmatrix}$?

Antwort: $$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ b_1 & b_3 & b_5 \\ e_1 & e_3 & e_5 \end{vmatrix}.$$

11) Entwickele
$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a'_0 & a'_1 & a'_2 \\ a'_0 & a'_1 & a'_2 & 0 \end{vmatrix}$$
nach den Elementen der beiden ersten Horizontalreihen.

Antwort:
$$\begin{vmatrix} 0 & a_0 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a'_1 & a'_2 \\ a'_2 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & a_1 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a'_0 & a'_2 \\ a'_1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_2 \\ a_0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a'_0 & a'_1 \\ a'_1 & a'_2 \end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & a'_2 \\ a'_0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & a'_1 \\ a'_0 & a'_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & a'_0 \\ a'_0 & a'_1 \end{vmatrix}$$
$$= (a_0 a'_2 - a'_0 a_2)^2 + (a_0 a'_1 - a'_0 a_1)(a_2 a'_1 - a'_2 a_1).$$

12) Entwickele die Determinante in Beispiel 11) nach den Elementen der ersten und dritten Horizontalreihe.

Antwort: $$\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a'_0 & a'_2 \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a'_1 & a'_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a'_0 & a'_1 \end{vmatrix}.$$

13) Entwickele
$$\begin{vmatrix} 0, & 0, & x_3, & x_4 \\ 0, & 0, & y_3, & y_4 \\ z_1, & z_2, & z_3, & z_4 \\ v_1, & v_2, & v_3, & v_4 \end{vmatrix}$$
nach den ersten beiden Horizontalreihen.

Antwort: $$\begin{vmatrix} x_3 & x_4 \\ y_3 & y_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = (x_3 y_4 - x_4 y_3)(z_1 v_2 - z_2 v_1).$$

14) Beweise, dass jede Determinante $n$ten Grades in eine Summe von Produkten entwickelt werden kann, so dass der eine Faktor eine Determinante $p$ten Grades, der andere eine solche $(n-p)$ten Grades ist. (Siehe § 62.)

Erläuterung. Beweis durch vollständige Induction: Unter der Voraussetzung der Richtigkeit für $p-1$ beweist man die Richtigkeit für p.

Dann zeigt man, dass er für $p - 1 = 2$ gilt.

15) Beweise die allgemeine Richtigkeit des Satzes § 64.

16) Entwickele $\begin{vmatrix} A-x, & B_2, & B_1 \\ B_2, & A_1-x, & B \\ B_1, & B, & A_2-x \end{vmatrix}$

nach Potenzen von x; vergleiche § 58, Beispiel 25, und § 53 Beispiel 17.

Antwort:

$$\begin{vmatrix} A & B_2 & B_1 \\ B_2 & A_1 & B \\ B_1 & B & A_2 \end{vmatrix} - x\,(A_1 A_2 - B^2 + A_2 A - B_1^2 + A A_1 - B_2^2) + x^2 (A_2 + A_1 + A) - x^3.$$

17) Entwickele

$$\begin{vmatrix} a_0 - x, & a_1, & a_2 \\ a_3, & a_0 + \frac{x}{2}, & a_1 \\ a_4, & a_3, & a_0 - x \end{vmatrix}$$

nach Potenzen von x.

Antwort: $\frac{x^3}{2} - \frac{x}{2}(a_2 a_4 - 4\, a_1 a_3 + 3\, a_0^2)$

$$-(a_0 a_2 a_4 + 2\, a_0 a_1 a_3 - a_2 a_3^2 - a_4 a_1^2 - a_0^3).$$

18) Entwickele

$$\begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & a_{n-4} & \ldots & \ldots & a_0 \end{vmatrix}$$

nach Potenzen von a_0.

Antwort: a_0^n.

19) Wie kann man das vorige Resultat als Theorem aussprechen?

20) Entwickele nach den Elementen der Diagonale

$$\begin{vmatrix} a_1, & a_0 \\ 2a_2, & a_1 \end{vmatrix}.$$

Antwort: $(a_1^2 - 2\, a_0 a_2)$.

21) Ferner
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ 2a_2 & a_1 & a_0 \\ 3a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}.$$

Antwort: $a_1^3 - 3a_1 a_0 a_2 + 3a_0^2 a_3.$

22) Nach demselben Princip
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 2a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ 3a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 4a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}.$$

Antwort: $a_1^4 - 4a_1^2 a_0 a_2 + 4a_1 a_0^2 a_3 + 2a_0^2 a_2^2 - 4a_0^3 a_4.$

23) Auf dieselbe Art
$$\begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 \\ s_3 & s_2 & s_1 \end{vmatrix}.$$

Antwort: $s_1^3 - 3s_1 s_2 + 2s_3.$

24) Ebenso
$$\begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & 3 \\ s_4 & s_3 & s_2 & s_1 \end{vmatrix}.$$

Antwort: $s_1^4 - 6s_1^2 s_2 + 8s_1 s_3 + 3s_2^2 - 6s_4.$

Anmerkung. Beispiele wie die von 20—24 sind für die Theorie der symmetrischen Funktionen von Bedeutung.

25) Beweise die allgemeine Gültigkeit der Sätze in § 68.

26) Es soll die Entwickelung einer Determinante nach den Elementen einer Linie, welche der Diagonale parallel ist, abgeleitet werden.

27) Zur Prüfung des in 26) enthaltenen Resultates entwickele 22) nach Potenzen von a_0, ferner 24) nach Potenzen von s_2.

28) Entwickele
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_0 & s_1 & s_2 & s_3 \\ s_0 & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \\ 0 & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}$$

nach den Elementen der ersten und letzten Horizontalreihe.

Antwort:

$$-x_0\begin{vmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \\ s_3 & s_4 & s_5 \end{vmatrix} + x_1\begin{vmatrix} s_0 & s_2 & s_3 \\ s_1 & s_3 & s_4 \\ s_2 & s_4 & s_5 \end{vmatrix} - x_2\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_3 \\ s_1 & s_2 & s_4 \\ s_2 & s_3 & s_5 \end{vmatrix}$$

$$+ x_3\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ s_0 & s_1 & s_2 & s_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \end{vmatrix}.$$

29) Wie würde sich die letzte Determinante sofort ohne Entwickelung ergeben?

30) Entwickele

$$\begin{vmatrix} \frac{\lambda}{a_0}, & -l^{\frac{1}{3}}, & -m^{\frac{1}{3}} \\ l^{\frac{1}{3}}, & -m^{\frac{1}{3}}, & \frac{\lambda}{a_0} \\ -m^{\frac{1}{3}}, & \frac{\lambda}{a_0}, & -l^{\frac{1}{3}} \end{vmatrix}$$

nach den Elementen der zweiten Diagonale [nach $-m^{\frac{1}{3}}$].

Antwort: $-\left[\frac{\lambda^3}{a_0^{\,3}} - l\right] + \frac{\lambda}{a_0}\cdot l^{\frac{1}{3}} m^{\frac{1}{3}} - m.$

Anmerkung. Die zweite Diagonale soll nicht erst in die erste übergeführt werden, sondern es soll das Beweisprinzip von § 66 in Anwendung gebracht werden.

§ 70.

Beziehungen der Orginaldeterminante zur Determinante des adjungirten Systems.

Bezeichnen wir mit Δ_1 die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

und mit $\alpha_{k\lambda}$ den Faktor von $a_{k\lambda}$ in der Entwickelung von Δ_1, so ist früher gezeigt worden, dass

$$\alpha_{k\lambda} = (-1)^{k+\lambda}\,X$$

ist (§ 51), wo X diejenige Determinante bedeutet, welche aus Δ_1 durch Fortlassung der $k$ten Vertikal- und der λten Horizontalreihe hervorgeht.

$\alpha_{k\lambda}$ heisst eine Unterdeterminante $(n-1)$ten Grades oder ein Minor erster Ordnung. Ferner nennt man $\alpha_{k\lambda}$ das $a_{k\lambda}$ adjungirte Element.

Wir haben früher (§ 48 und 49) die wichtigen Beziehungen abgeleitet:

$$1)\quad a_{1\lambda}\,\alpha_{1\lambda} + a_{2\lambda}\,\alpha_{2\lambda} + a_{3\lambda}\,\alpha_{3\lambda} + \ldots + a_{n\lambda}\,\alpha_{n\lambda} = \Delta_1.$$

$$2)\quad a_{\mu 1}\,\alpha_{\mu 1} + a_{\mu 2}\,\alpha_{\mu 2} + a_{\mu 3}\,\alpha_{\mu 3} + \ldots + a_{\mu n}\,\alpha_{\mu n} = \Delta_1.$$

$$3)\quad a_{1\lambda}\,\alpha_{1k} + a_{2\lambda}\,\alpha_{2k} + a_{3\lambda}\,\alpha_{3k} + \ldots + a_{n\lambda}\,\alpha_{nk} = 0.$$

$$4)\quad a_{\mu 1}\,\alpha_{\nu 1} + a_{\mu 2}\,\alpha_{\nu 2} + a_{\mu 3}\,\alpha_{\nu 3} + \ldots + a_{\mu n}\,a_{\nu n} = 0.$$

Bei der Relation 3) ist λ von k, bei 4) μ von ν verschieden vorausgesetzt. Andere Hypothesen liegen den vier Gruppen von Relationen nicht zu Grunde.

Die Determinante

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} & \ldots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} & \ldots & \alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \alpha_{3n} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

heisst die Determinante des *adjungirten Systems* oder auch die *Reciproke* der Determinante Δ_1. Die Berechtigung dieser zweiten Benennung werden wir später nachweisen.

Nach dem Multiplikationstheoreme erhält man unter Berücksichtigung der Relationsgruppen 1) und 3)

$$\Delta_1 \cdot \delta_1 = \begin{vmatrix} \Delta_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \Delta_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \Delta_1 \end{vmatrix} = \Delta_1^{\,n}.$$

Also ist

$$\delta_1 = \Delta_1^{\,n-1}.$$

Dieses Resultat kann als Satz ausgesprochen werden, wie folgt: *Die Determinante des adjungirten Systems von n^2 Elementen ist gleich der $(n-1)$ten Potenz der Originaldeterminante.*

Wir wollen jetzt eine Unterdeterminante von δ_1 mit Δ_1 multipliciren und gehen dabei von der Unterdeterminante zweiten Grades oder dem Minor zweiter Ordnung

$$M_2 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{vmatrix}$$

aus. Dieser kann vervollständigt werden in

$$M_2 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} & \alpha_{41} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} & \alpha_{42} & \dots & \alpha_{n2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Durch Multiplikation nach den Horizontalreihen erhält man

$$\Delta_1 \cdot M_2 = \begin{vmatrix} \Delta_1 & 0 & a_{31} & a_{41} & \dots & a_{n1} \\ 0 & \Delta_1 & a_{32} & a_{42} & \dots & a_{n2} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{43} & \dots & a_{n3} \\ 0 & 0 & a_{34} & a_{44} & \dots & a_{n4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a_{3n} & a_{4n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

wenn man gleichzeitig die Gleichungen 1) und 3) benutzt.

Nach Früherem kann man schreiben

$$\Delta_1 \cdot M_2 = \Delta_1^2 \begin{vmatrix} a_{33} & a_{43} & \dots & a_{n3} \\ a_{34} & a_{44} & \dots & a_{n4} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{3n} & a_{4n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

und

$$M_2 = \Delta_1 \begin{vmatrix} a_{33} & a_{43} & \dots & a_{n3} \\ a_{34} & a_{44} & \dots & a_{n4} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{3n} & a_{4n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Dieses einfache Resultat wollen wir zunächst dadurch verallgemeinern, dass wir einen beliebigen Minor zweiter

Ordnung herausgreifen und nach passender Umformung die Multiplikation mit Δ_1 ausführen. Wir wählen den Minor

$$\mu_2 = \begin{vmatrix} \alpha_{k\lambda} & \alpha_{\mu\lambda} \\ \alpha_{k\nu} & \alpha_{\mu\nu} \end{vmatrix},$$

welchen wir gleich

$$\begin{vmatrix} \alpha_{k\lambda} & \alpha_{\mu\lambda} & \alpha_{1\lambda} & \alpha_{2\lambda} & \ldots & \alpha_{k-1,\lambda} & \alpha_{k+1,\lambda} & \ldots & \alpha_{\mu-1,\lambda} & \alpha_{\mu+1,\lambda} & \ldots & \alpha_{n\lambda} \\ \alpha_{k\nu} & \alpha_{\mu\nu} & \alpha_{1\nu} & \alpha_{2\nu} & \ldots & \alpha_{k-1,\nu} & \alpha_{k+1,\nu} & \ldots & \alpha_{\mu-1,\nu} & \alpha_{\mu+1,\nu} & \ldots & \alpha_{n\nu} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 & 0 & & 1 \end{vmatrix}$$

setzen.

In der Originaldeterminante kann man durch Vertauschungen von parallelen Reihen die λte Horizontalreihe zur ersten, die νte zur zweiten machen, während die übrigen dann in der natürlichen Ordnung auf einander folgen. Dasselbe geschieht mit der $k$ten und μten Vertikalreihe. Nach § 61 und § 45 erhält man leicht

$$\Delta_1 = (-1)^{\lambda+k+\mu+\nu} \times$$

$$\begin{vmatrix} a_{k\lambda} & a_{\mu\lambda} & a_{1\lambda} & a_{2\lambda} & a_{3\lambda} & \ldots a_{k-1,\lambda} & a_{k+1,k} & \ldots a_{\mu-1,\lambda} & a_{\mu+1,\lambda} & \ldots a_{n\lambda} \\ a_{k\nu} & a_{\mu\nu} & a_{1\nu} & a_{2\nu} & a_{3\nu} & \ldots a_{k-1,\nu} & a_{k+1,\nu} & \ldots a_{\mu-1,\nu} & a_{\mu+1,\nu} & \ldots a_{n\nu} \\ a_{k1} & a_{\mu1} & a_{11} & a_{21} & a_{31} & \ldots a_{k-1,1} & a_{k+1,1} & \ldots a_{\mu-1,1} & a_{\mu+1,1} & \ldots a_{n1} \\ a_{k2} & a_{\mu2} & a_{12} & a_{22} & a_{32} & \ldots a_{k-1,2} & a_{k+1,2} & \ldots a_{\mu-1,2} & a_{\mu+1,2} & \ldots a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k,\lambda-1} & a_{\mu,\lambda-1} & a_{1,\lambda-1} & a_{2,\lambda-1} & a_{3,\lambda-1} & \ldots a_{k-1,\lambda-1} & a_{k+1,\lambda-1} & \ldots a_{\mu-1,\lambda-1} & a_{\mu+1,\lambda-1} & \ldots a_{n,\lambda-1} \\ a_{k,\lambda+1} & a_{\mu,\lambda+1} & a_{1,\lambda+1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k,\nu-1} & a_{\mu,\nu-1} & a_{1,\nu-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k,\nu+1} & a_{\mu,\nu+1} & a_{1,\nu+1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{kn} & a_{\mu n} & a_{1n} & a_{2n} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Multipliciren wir die letzten beiden Determinanten nach dem Multiplikationstheorem, so wird

$$\Delta_1\, \mu_2 = (-1)^{\lambda+k+\mu+\nu} \times$$

$$\left|\begin{array}{cccccccccccc}
\Delta_1 & 0 & a_{1\lambda} & a_{2\lambda} & \dots & a_{k-1,\lambda} & a_{k+1,\lambda} & \dots & a_{\mu-1,\lambda} & a_{\mu+1,\lambda} & \dots & a_{n\lambda} \\
0 & \Delta_1 & a_{1\nu} & a_{2\nu} & \dots & a_{k-1,\nu} & a_{k+1,\nu} & \dots & a_{\mu-1,\nu} & a_{\mu+1,\nu} & \dots & a_{n\nu} \\
0 & 0 & a_{11} & a_{21} & \dots & a_{k-1,1} & a_{k+1,1} & \dots & a_{\mu-1,1} & a_{\mu+1,1} & \dots & a_{n1} \\
0 & 0 & a_{12} & a_{22} & \dots & a_{k-1,1} & a_{k+1,2} & \dots & a_{\mu-1,2} & a_{\mu+1,2} & \dots & a_{n2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{k-1,n} & a_{k+1,n} & \dots & a_{\mu-1,n} & a_{\mu+1,n} & \dots & a_{nn}
\end{array}\right|$$

$$= \Delta_1^{\,2} \cdot (-1)^{\lambda+k+\mu+\nu} \times$$

$$\left|\begin{array}{ccccccc}
a_{11} & a_{21} & \dots a_{k-1,1} & a_{k+1,1} & \dots a_{\mu-1,1} & a_{\mu+1,1} & \dots a_{n1} \\
a_{12} & a_{22} & \dots a_{k-1,2} & a_{k+1,2} & \dots a_{\mu-1,2} & a_{\mu+1,2} & \dots a_{n2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{1,\lambda-1} & a_{2,\lambda-1} & \dots a_{k-1,\lambda-1} & a_{k+1,\lambda-1} & \dots a_{\mu-1,\lambda-1} & a_{\mu+1,\lambda-1} & \dots a_{n,\lambda-1} \\
a_{1,\lambda+1} & a_{2,\lambda+1} & \dots a_{k-1,\lambda+1} & a_{k+1,\lambda+1} & \dots a_{\mu-1,\lambda+1} & a_{\mu+1,\lambda+1} & \dots a_{n,\lambda+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{1,\nu-1} & a_{2,\nu-1} & \dots a_{k-1,\nu-1} & a_{k+1,\nu-1} & \dots a_{\mu-1,\nu-1} & a_{\mu+1,\nu-1} & \dots a_{n,\nu-1} \\
a_{1,\nu+1} & a_{2,\nu+1} & \dots a_{k-1,\nu+1} & a_{k+1,\nu+1} & \dots a_{\mu-1,\nu+1} & a_{\mu+1,\nu+1} & \dots a_{n,\nu+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{1n} & a_{2n} & \dots a_{k-1,n} & a_{k+1,n} & \dots a_{k-1,n} & a_{k+1,n} & \dots a_{nn}
\end{array}\right|$$

Nennen wir den zweiten Faktor mit dem Vorzeichen C_2, so ist

$$\mu_2 = \Delta_1 \times C_2 .$$

Nach § 61 ist C_2 das Complement von $\left|\begin{array}{cc} a_{k\lambda} & a_{\mu\lambda} \\ a_{k\nu} & a_{\mu\nu} \end{array}\right| = \beta_2$.

Beachtet man ferner, dass das Elementensystem von β_2 demjenigen in μ_2 adjungirt ist, so liefert jene Formel den Satz:

Irgend ein Minor zweiter Ordnung der adjungirten Elemente ist gleich dem Produkte aus der Originaldeterminante und dem complementären Minor des entsprechenden Minors der Originaldeterminante.

Der Leser wird die Untersuchung für die dritten, vierten etc. Minoren selbst führen können.

§ 71.

Verschwindende Determinante.

Nach dem Vorigen enthält jeder Minor der Determinante des Systems adjungirter Elemente mit Ausnahme des ersten die Originaldeterminante als Faktor. Ist nun die letztere

$$\Delta_1 = 0,$$

so verschwinden auch jene Minoren. Demnach besteht unter dieser Voraussetzung die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \alpha_{k\lambda} & \alpha_{\mu\lambda} \\ \alpha_{k\nu} & \alpha_{\mu\nu} \end{vmatrix} = 0.$$

Hieraus folgt

1) $$\alpha_{k\lambda}\,\alpha_{\mu\nu} = \alpha_{\mu\lambda}\,\alpha_{k\nu},$$

also auch

$$\alpha_{k\lambda} : \alpha_{\mu\lambda} = \alpha_{k\nu} : \alpha_{\mu\nu}.$$

Bildet man alle Proportionen für die λte und νte Horizontalreihe, so ergibt sich

2) $$\alpha_{1\lambda} : \alpha_{2\lambda} : \alpha_{3\lambda} : \ldots \alpha_{n\lambda} = \alpha_{1\nu} : \alpha_{2\nu} : \alpha_{3\nu} : \ldots \alpha_{n\nu},$$

ein Resultat, welches sich als Satz aussprechen lässt:

Verschwindet die Determinante, so sind die adjungirten Elemente irgend einer Horizontalreihe den entsprechenden adjungirten einer beliebigen anderen proportional.

Aus 1) lässt sich bilden

$$\alpha_{k\lambda} : \alpha_{k\nu} = \alpha_{\mu\lambda} : \alpha_{\mu\nu},$$

so dass man hat

3) $$\alpha_{k1} : \alpha_{k2} : \alpha_{k3} : \ldots \alpha_{kn} = \alpha_{\mu 1} : \alpha_{\mu 2} : \alpha_{\mu 3} : \ldots \alpha_{\mu n}.$$

Diese Gleichung gibt den Satz:

Verschwindet eine Determinante, so sind die adjungirten Elemente irgend einer Vertikalreihe den entsprechenden adjungirten jeder anderen proportional.

Hiernach ist

$$\alpha_{1\lambda} : \alpha_{2\lambda} = \alpha_{11} : \alpha_{21}$$

und

$$\alpha_{k1} : \alpha_{k2} = \alpha_{21} : \alpha_{22}.$$

Durch Zusammensetzung erhält man

$$\alpha_{1\lambda} \cdot \alpha_{k1} : \alpha_{2\lambda} \cdot \alpha_{k2} = \alpha_{11} \cdot \alpha_{21} : \alpha_{21} \cdot \alpha_{22}$$

oder

$$\alpha_{1\lambda} \cdot \alpha_{k1} : \alpha_{2\lambda}\, \alpha_{k2} = \alpha_{11} : \alpha_{22}.$$

Durch entsprechende Bildungen bekommt man schliesslich

$$4)\quad \alpha_{1\lambda} \cdot \alpha_{k1} : \alpha_{2\lambda}\alpha_{k2} : \alpha_{3\lambda}\alpha_{k3} : \ldots \alpha_{n\lambda}\alpha_{kn} = \alpha_{11} : \alpha_{22} : \alpha_{33} : \ldots : \alpha_{nn}.$$

Diese wichtige Formel drücken wir durch den Satz aus: Verschwindet die Determinante, so sind die Produkte aus den σten adjungirten Elementen einer Horizontalreihe und den σten adjungirten Elementen einer beliebigen Vertikalreihe den σten adjungirten Elementen der Diagonale proportional.

Setzen wir im Besonderen $k = \lambda$, so geht 4) über in

$$5)\quad \alpha_{1\lambda} \cdot \alpha_{\lambda 1} : \alpha_{2\lambda} \cdot \alpha_{\lambda 2} : \alpha_{3\lambda} \cdot \alpha_{\lambda 3} : \ldots \alpha_{n\lambda} \cdot \alpha_{\lambda n} = \alpha_{11} : \alpha_{22} : \alpha_{33} : \ldots \alpha_{nn}.$$

Wir nennen das Element $\alpha_{\mu\lambda}$ dem Elemente $\alpha_{\lambda\mu}$ entsprechend. Der vorige Satz nimmt so die Form an:

Verschwindet eine Determinante, so sind die Produkte aus entsprechenden adjungirten Elementen einer Horizontalreihe und der zugehörigen Vertikalreihe den entsprechenden adjungirten Elementen der Diagonale proportional.

§ 72.

Verschwinden einer Unterdeterminante.

Es sei die Determinante

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \ldots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \ldots & a_{n3} \\ \vdots & & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

gegeben und die Unterdeterminante

$$\alpha_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} & \ldots & a_{n2} \\ a_{23} & a_{33} & \ldots & a_{n3} \\ a_{24} & a_{34} & \ldots & a_{n4} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2n} & a_{3n} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

5) Wie lässt sich dieses Resultat sofort aus der in 3) gegebenen Determinante ableiten?

Anmerkung. Man subtrahire die zweite Vertikalreihe von der dritten.

6) Beweise für die Determinante

$$\varDelta_1 = \begin{vmatrix} ka_1 & ka_2 & ka_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

die Richtigkeit der Proportion $\alpha_{11} : \alpha_{21} : \alpha_{31} = \alpha_{12} : \alpha_{22} : \alpha_{32}$ ohne Benutzung des Satzes § 71.

7) Weshalb kann man nicht aus der Determinante

$$\varDelta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

eine Relation zwischen den sechs Grössen $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ herleiten, obgleich $\varDelta_1$ verschwindet?

8) Die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 \\ 2 & 10 & 4 & 5 \\ 3 & 15 & 5 & 6 \\ 4 & 20 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 0. \quad \text{(Weshalb?)}$$

Beweise ohne Benutzung der einleitenden Bemerkung in § 71, dass irgend ein Minor zweiter oder dritter Ordnung des Systems der adjungirten Elemente verschwindet, etwa in folgender Weise:

$$\alpha_{11} = +5 \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -2 \cdot 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -10.$$

Ebenso

$$\alpha_{21} = +2; \; \alpha_{12} = +20; \; \alpha_{22} = -4.$$

Also ist

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -10 & +20 \\ +2 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

Auf dieselbe Art sollen die anderen Minoren behandelt werden.

9) Stelle die in der vorigen Aufgabe bereits berechneten sechzehn Unterdeterminanten in der richtigen Reihenfolge zur Determinante des adjungirten Systems zusammen und beweise durch Ausrechnen, dass dieselbe den Werth 0 hat (Bestätigung der Formel $\delta_1 = \Delta_1^{n-1}$ in § 70).

10) In § 53 Aufgabe 7 wurde gefunden, dass

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

ist. In § 70 wurde die Gleichung $\delta_1 = \Delta_1^{n-1}$ abgeleitet. Bilde die 16 Unterdeterminanten von Δ_1, hieraus δ_1 und zeige durch Ausrechnen, dass $\delta_1 = 1$ ist.

11) Es ist

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 10 \end{vmatrix} = 0. \text{ (Weshalb?)}$$

Berechne die Unterdeterminanten und prüfe die Richtigkeit der Gleichungen 4) und 5) in § 71.

Weshalb tritt hier auch ein Verschwinden der Unterdeterminanten ein?

12) Es soll untersucht werden, ob allgemein

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} A_1, & A_1+x, & A_1+2x, & A_1+3x, \ldots A_1+(n-1)x \\ A_1+x, & A_1+2x, & A_1+3x, & A_1+4x, \ldots A_1+nx \\ A_1+2x, & A_1+3x, & A_1+4x, & A_1+5x, \ldots A_1+(n+1)x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ A_1+(n-1)x, & A_1+nx, & A_1+(n+1)x, & \ldots \quad \ldots A_1+(2n-1)x \end{vmatrix}$$

mit allen Unterdeterminanten verschwindet.

13) Untersuche diese Eigenschaften für Determinanten, die aus den figurirten Zahlen gebildet sind, zunächst an Beispielen und dann allgemein. Die dazu nothwendigen Lehrsätze aus

der Theorie der figurirten Zahlen findet man in jedem elementaren Lehrbuche.

Als Beispiel diene

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 & 10 \\ 3 & 6 & 10 & 15 \\ 6 & 10 & 15 & 21 \\ 10 & 15 & 21 & 28 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 4 & 5 & 6 \\ 10 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\alpha_{11} = \begin{vmatrix} 6 & 10 & 15 \\ 10 & 15 & 21 \\ 15 & 21 & 28 \end{vmatrix} = -1, \text{ u. s. f.}$$

14) Beweise, dass die beiden Klammern in 5) § 72 Determinanten sind.

15) In dem Beispiele 3) zeigte sich, dass der zweite Faktor wieder in ein Produkt zweier Determinanten zerlegt werden konnte. Es verschwand dort α_{11}, weil die erste und zweite Vertikalreihe identisch waren. Es soll untersucht werden, ob dieses allgemein für eine Determinante $n$ten Grades gültig ist, wenn für α_{11} dieselben Voraussetzungen gelten.

16) Wie gestaltet sich Δ_1, wenn die ersten beiden Horizontalreihen in α_{11} gleich sind?

17) Beweise, dass das Quadrat der Determinante des adjungirten Systems gleich der Determinante des adjungirten Systems des Quadrates der Originaldeterminante ist.

(Mit Hilfe von § 70.)

18) Entwickele

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 - x \\ a_1 & a_2 & a_3 + \frac{x}{3}, & a_4 \\ a_2 & a_3 - \frac{x}{3}, & a_4 & a_5 \\ a_3 + x, & a_4 & a_5 & a_6 \end{vmatrix}$$

nach Potenzen von x.

(Siehe Beispiel 30) in § 69.)

§ 74.

Unterdeterminanten symmetrischer Determinanten.

Das $k$te Element in der λten Horizontalreihe und das λte Element in der $k$ten Vertikalreihe, nämlich $a_{k\lambda}$ und $a_{\lambda k}$, heissen conjugirt. In Beispiel 18) des vorigen § würden also conjugirt sein $a_3 - x$ und $a_3 + x$, $a_3 + \frac{x}{3}$ und $a_3 - \frac{x}{3}$, a_4 der zweiten Horizontalreihe und a_4 der zweiten Vertikalreihe, a_2 der ersten Horizontalreihe und a_2 der ersten Vertikalreihe, in Beispiel 10) 5 der ersten Horizontalreihe und 2 der ersten Vertikalreihe.

Sind die conjugirten Elemente gleich, so heisst die Determinante symmetrisch. Beispiele findet man in § 58, so 1, 2, 3, in der Antwort von 13, 19; in 20, 21 u. s. f.

Um nun die Unterdeterminante $\alpha_{k\lambda}$ zu bilden, muss man die $k$te Vertikal- und die λte Horizontalreihe auslassen und mit $(-1)^{\lambda+k}$ multipliciren.

$\alpha_{\lambda k}$ dagegen wollen wir in folgender Weise bilden. Wir machen die Vertikalreihen der Originaldeterminante zu Horizontalreihen, und umgekehrt, lassen dann die $k$te Vertikal- und Horizontalreihe aus und multipliciren mit $(-1)^{k+\lambda}$.

Da nun durch die Vertauschung der Vertikalreihen mit den Horizontalreihen die Determinante nicht geändert wird, und da die Elemente der Vertikalreihen den Elementen der entsprechenden Horizontalreihen gleich sind, so ist die Originaldeterminante mit der durch Vertauschung entstandenen auch in den Elementen identisch; demnach ist auch

$$\alpha_{k\lambda} = \alpha_{\lambda k},$$

weil beide durch Fortlassung derselben Reihen entstanden sind.

Anmerkung. Dass unsere Art der Bildung von $\alpha_{\lambda k}$ erlaubt ist, davon überzeugt man sich an jeder (nicht blos symmetrischen) Determinante.

Hieraus folgt mit Berücksichtigung der Erklärungen der Satz:

Ist eine Determinante symmetrisch, so ist auch die Determinante des Systems der adjungirten Elemente symmetrisch.

§ 75.

Entwickelung der symmetrischen Determinante nach den Elementen einer Horizontal-Vertikalreihe.

In § 64 haben wir $\varDelta_1$ aufgelöst in

$$a_{11}\alpha_{11} - \sum_2^n a_{\lambda 1}\, a_{1\mu}\, \beta_{\lambda\mu},$$

wo $\varDelta_1$ eine beliebige Determinante $n$ten Grades ist, während $\beta_{\lambda\mu}$ dadurch entsteht, dass man die erste Horizontal- und Vertikal-, und die μte Horizontal- und λte Vertikalreihe auslässt und mit $(-1)^{\lambda+\mu}$ multiplicirt. Man kann also $\beta_{\lambda\mu}$ auch als den Coefficienten von $a_{\kappa\lambda}$ in der Determinante α_{11} ansehen.

Ist nun $\varDelta_1$ symmetrisch, so ergibt sich durch eine einfache Ueberlegung, dass auch α_{11} eine symmetrische Determinante ist, deren Elemente von 2 bis n indicirt sind.

Also muss $a_{\lambda 1} = a_{1\lambda}$ und $\beta_{\lambda\mu} = \beta_{\mu\lambda}$ sein.

Nun zerfällt

$$\sum_2^n a_{\lambda 1}\, a_{1\mu}\, \beta_{\lambda\mu}$$

in Glieder, die man erhält, indem man erst μ alle Werthe von 2 bis n und dann in jedem Gliede λ alle Werthe von $2 - n$ giebt; im Ganzen also in $(n-2)^2$ Glieder.

Davon heissen $n - 2$ Glieder

$$a_{21}\, a_{12}\, \beta_{22}, \quad a_{31}\, a_{13}\, \beta_{33}, \quad a_{41}\, a_{14}\, \beta_{44} \ldots a_{n1}\, a_{1n}\, \beta_{nn}.$$

Ihre Summe kann man symbolisch darstellen durch

$$\sum_2^n{}^{\sigma}\, a_{\sigma 1}\, a_{1\sigma}\, \beta_{\sigma\sigma} = \sum_2^n{}^{\sigma}\, a^2{}_{\sigma 1}\, \beta_{\sigma\sigma}.$$

Die noch übrigen Glieder haben nur solche λ, welche von μ verschieden sind; aber je zwei derselben entsprechen sich stets; heisst z. B. das eine

$a_{31}\, a_{17}\, \beta_{37}$, so ist das andere $a_{71}\, a_{13}\, \beta_{73}$;

diese sind gleich. Der ganze Theil ist also

$$2 \sum_2^n a_{\nu 1}\, a_{1\varrho}\, \beta_{\nu\varrho},$$

wo für ν, ϱ alle Combinationen zweiter Classe ohne Wiederholung der Elemente $2\,3\,4\ldots n$ zu nehmen sind.

Hiermit erhält man unter der Voraussetzung einer symmetrischen Determinante

$$1)\quad \Delta_1 = a_{11}\,\alpha_{11} - \sum_2^n a^2_{\sigma 1}\,\beta_{\sigma\sigma} - 2\sum_2^n a_{\nu 1}\,a_{1\varrho}\,\beta_{\nu\varrho}.$$

Wendet man § 65 auf die symmetrischen Determinanten an und zwar auf die letzte Vertikal- und Horizontalreihe, so wird

$$2)\quad \Delta_1 = a_{nn}\,\alpha_{nn} - \sum_2^{n-1} a^2_{\sigma,n}\,\beta_{\sigma\sigma} - 2\sum_2^{n-1} a_{\nu n}\,a_{n\varrho}\,\beta_{\nu\varrho}.$$

§ 76.

Verschwindende symmetrische Determinante.

In § 71 leiteten wir die fortlaufende Proportion

$$\alpha_{1\lambda} : \alpha_{2\lambda} : \ldots \alpha_{n\lambda} = \alpha_{1\nu} : \alpha_{2\nu} : \ldots \alpha_{n\nu}$$

unter der Voraussetzung ab, dass Δ_1 verschwindet. Ist nun Δ_1 symmetrisch, so hat man ausserdem

$$\alpha_{k\lambda} = \alpha_{\lambda k};$$

demnach ist

$$\alpha_{11} : \alpha_{21} = \alpha_{12} : \alpha_{22}.$$

$$1)\quad \alpha_{12}^2 = \alpha_{11} \cdot \alpha_{22}.$$

$$\alpha_{22} : \alpha_{23} = \alpha_{32} : \alpha_{33}.$$

$$2)\quad \alpha_{23}^2 = \alpha_{22} \cdot \alpha_{33}.$$

$$\alpha_{11} : \alpha_{31} = \alpha_{13} : \alpha_{33}.$$

$$3)\quad \alpha_{13}^2 = \alpha_{11} \cdot \alpha_{33},$$

u. s. f.

Aus diesen Gleichungen oder aus § 71 5) folgt

$$4)\quad \alpha_{\lambda 1}^2 : \alpha_{\lambda 2}^2 : \ldots \alpha_{\lambda, n}^2 = \alpha_{11} : \alpha_{22} : \alpha_{33} : \ldots : \alpha_{nn}.$$

Man hat ferner allgemein

$$5)\quad \alpha_{k\lambda}^2 = \alpha_{kk}\,\alpha_{\lambda\lambda},$$

$$6)\quad \alpha_{k\lambda} = \pm\sqrt{\alpha_{kk}\,\alpha_{\lambda\lambda}}.$$

Es lassen sich also die Unterdeterminanten berechnen aus den Elementen der Hauptdiagonale der Determinante der adjungirten Elemente bis auf das Zeichen, wenn die Originaldeterminante verschwindet.

Ueber das Vorzeichen lassen sich ebenfalls einige Bestimmungen treffen.

Für jede verschwindende Determinante (§ 71, 3) gilt die Proportion

$$\alpha_{1\lambda} : \alpha_{2\lambda} : \alpha_{3\lambda} : \ldots : \alpha_{n\lambda} = \alpha_{11} : \alpha_{21} : \alpha_{31} : \ldots : \alpha_{n1}.$$

Kennt man daher sämmtliche Vorzeichen der Glieder auf der rechten Seite und das Vorzeichen eines Gliedes der linken Seite, so kennt man auch die übrigen. Wir wählen als dieses Glied $\alpha_{1\lambda}$. Aus den Proportionen

$$\alpha_{12} : \alpha_{22} : \ldots \alpha_{n2} = \alpha_{11} : \alpha_{21} \ldots : \alpha_{n1}$$

$$\vdots$$

$$\alpha_{1n} : \alpha_{2n} : \ldots \alpha_{nn} = \alpha_{11} : \alpha_{21} \ldots : \alpha_{n1}$$

ergibt sich demnach, dass alle Vorzeichen der Unterdeterminanten gegeben sind, sobald die Vorzeichen der Elemente der ersten Horizontal- und Vertikalreihe der Determinante des adjungirten Systems gegeben sind, wenn die Originaldeterminante verschwindet.

Dieses System enthält n^2 Grössen. Die Vorzeichen von $2n - 1$ dieser Grössen sind also willkürlich, während die übrigen $(n-1)^2$ sich von selbst ergeben. Ist nun die Originaldeterminante symmetrisch, so ist nach § 74 auch die Determinante des Systems der adjungirten Elemente symmetrisch. In dieser stimmen demnach die Elemente α_{21}, $\alpha_{31} \ldots \alpha_{n1}$ mit den Elementen α_{12}, $\alpha_{13} \ldots \alpha_{1n}$ überein.

Kennt man also die Vorzeichen der Elemente der ersten Horizontalreihe, so sind die übrigen bestimmt.

§ 77.

Eine Unterdeterminante der symmetrischen Determinante verschwindet.

Nach diesen Feststellungen wollen wir uns der Gleichung 5) in § 72 zu wenden. Es war diese Gleichung nur an die Bedingung $\alpha_{11} = 0$ geknüpft; β_{22}, β_{23} etc. sind Unterdeterminanten von α_{11}.

Ist nun Δ_1 eine symmetrische Determinante, so ist auch α_{11} eine solche, und ferner ist alsdann

$$\beta_{23} = \beta_{32}; \quad \beta_{24} = \beta_{42}; \ldots \beta_{2n} = \beta_{n2}$$

und

$$a_{12} = a_{21}; \quad a_{13} = a_{31}; \ldots a_{1n} = a_{n1}.$$

Für symmetrische Determinanten geht also § 72, 5) über in

3) $$\Delta_1 = -\frac{1}{\beta_{22}}(a_{12}\beta_{22} + a_{13}\beta_{23} + a_{14}\beta_{24} + \ldots + a_{1n}\beta_{2n})^2.$$

Nach dem vorigen Paragraphen ist

$$\beta_{2\lambda} = \pm\sqrt{\beta_{22}\beta_{\lambda\lambda}}.$$

Also ist

1) $$\Delta_1 = -(\pm a_{12}\sqrt{\beta_{22}} \pm a_{13}\sqrt{\beta_{33}} \pm a_{14}\sqrt{\beta_{44}} \pm \ldots \pm a_{1n}\sqrt{\beta_{nn}})^2,$$

wenn β_{22} positiv ist. Bei negativem β_{22} hat man aber

2) $$\Delta_1 = +(\pm a_{12}\sqrt{\beta_{22}} \pm a_{13}\sqrt{\beta_{33}} \pm a_{14}\sqrt{a_{44}} \ldots \pm a_{1n}\sqrt{\beta_{nn}})^2.$$

Hierbei sind die Quadratwurzeln aus den absoluten Werthen der β zu ziehen; die Vorzeichen jedoch mit denen in 3) in Uebereinstimmung zu bringen.

§ 78.

Aufgaben.

1) Bilde die Determinante des Systems der adjungirten Elemente von

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{vmatrix}.$$

Antwort: $$\begin{vmatrix} -1 & +1 & -3 & -3 \\ +1 & -3 & +1 & -1 \\ -3 & +1 & -7 & +3 \\ -3 & -1 & +3 & -1 \end{vmatrix}.$$

Erläuterung. Man berechne α_{11}, α_{22}, α_{33}, α_{44}, dann alle α auf einer Seite der Diagonale, wodurch man die der anderen Seite mit erhält.

Um sich jedoch vollständige Klarheit über das Beweisprincip in § 74 zu verschaffen, führe man die letzteren in die ersteren über; etwa in folgender Weise:

$$\alpha_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 6 & 8 & 9 \\ 7 & 9 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

Ebenso bei α_{22}, α_{33}, α_{44}. (Achte auf das Vorzeichen $(-1)^{k+\lambda}$.) Dann

$$\alpha_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 6 & 7 \\ 3 & 8 & 9 \\ 4 & 9 & 10 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = +1.$$

$$\alpha_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 8 & 9 \\ 7 & 9 & 10 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 6 & 7 \\ 3 & 8 & 9 \\ 4 & 9 & 10 \end{vmatrix} = +1;$$

u. s. f.

2) Führe an dem Beispiele

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} & a_{51} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} & a_{42} & a_{52} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{43} & a_{53} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{54} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

den Beweis durch, dass $\alpha_{42} = \alpha_{24}$ ist, nach dem Principe von § 74.

3) Entwickele

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

nach den Elementen der ersten Horizontal-Vertikalreihe.

Antwort:

$$\Delta_1 = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}^2 a_{33} - a_{31}^2 a_{22} + 2 a_{21} a_{31} a_{32}.$$

4) Entwickele

$$\begin{vmatrix} x & y & z & w \\ y & x & w & z \\ z & w & x & y \\ w & z & y & x \end{vmatrix}$$

in derselben Weise

Antwort:

$$x \begin{vmatrix} x & w & z \\ w & x & y \\ z & y & x \end{vmatrix} - y^2 (x^2 - y^2) - z^2 (x^2 - z^2) - w^2 (x^2 - w^2)$$

$$- 2yz(yz - wx) - 2yw(wy - zx) - 2zw(wz - xy).$$

(Vergleiche § 58, Aufgabe 1).

5) Entwickele

$$\varDelta_1 = \begin{vmatrix} 0 & x & x & x \\ x & a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ x & a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ x & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

nach den Reihen mit x.

Antwort:

$$- x^2 (a_{22} a_{33} - a_{32}^2) - x^2 (a_{11} a_{33} - a_{31}^2) - x^2 (a_{11} a_{22} - a_{21}^2)$$
$$- 2 x^2 \cdot (a_{32} a_{31} - a_{21} a_{33}) - 2 x^2 (a_{21} a_{32} - a_{31} a_{22})$$
$$- 2 x^2 (a_{31} a_{21} - a_{11} a_{32}).$$

6) Es ist gegeben

$$\varDelta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 & 10 \\ 3 & 6 & 10 & 15 \\ 6 & 10 & 15 & 21 \\ 10 & 15 & 21 & 28 \end{vmatrix} = 0.$$

(Führe den Beweis der Richtigkeit durch Subtraktion paralleler Reihen, bis zwei derselben gleich sind.)

Es sollen $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}, \alpha_{44}; \alpha_{21}, \alpha_{31}, \alpha_{41}$ berechnet werden nach den gewöhnlichen Methoden. Dann sollen aus diesen die übrigen ersten Minoren abgeleitet werden mit Benutzung von § 76.

Antwort:

$\alpha_{11} = -1;$ $\alpha_{22} = -9;$ $\alpha_{33} = -9;$ $\alpha_{44} = -1.$

$\alpha_{21} = +3;$ $\alpha_{31} = -3;$ $\alpha_{41} = -1.$

$\alpha_{12} = +3;$ $\alpha_{32} = +9;$ $\alpha_{42} = +3.$

$\alpha_{13} = -3;$ $\alpha_{23} = +9;$ $\alpha_{43} = -3.$

$\alpha_{14} = -1;$ $\alpha_{24} = +3;$ $\alpha_{34} = -3.$

7) Beweise mit Hülfe des § 76 den Satz: Verschwindet eine symmetrische Determinante, so sind die Elemente der Hauptdiagonale der Determinante des Systems der adjungirten Elemente entweder alle positiv oder negativ. (Dasselbe Vorzeichen.)

8) Ferner: Verschwindet eine symmetrische Determinante und verschwinden die zur Hauptdiagonale gehörenden Unterdeterminanten, so sind sämmtliche ersten Minoren gleich Null.

9) Verschwindet eine symmetrische Determinante, so sind die Elemente der Hauptdiagonale der Reciprokaldeterminante dem absoluten Werthe nach Quadrate, wenn nicht alle Elemente dieser Reihe gleich sind.

10) Das Quadrat einer beliebigen Determinante ist eine symmetrische Determinante.

11) Gib nach § 77 den Werth an von

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_2 & 1 & 3 & 6 & 10 \\ x_3 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ x_4 & 6 & 10 & 15 & 21 \\ x_5 & 10 & 15 & 21 & 28 \end{vmatrix}.$$

Antwort: $\Delta_1 = +(-x_2 + 3\,x_3 - 3\,x_4 - x_5)^2.$

Benutze hierbei Aufgabe 6).

12) Wenn die Originaldeterminante symmetrisch ist, so sind auch die ersten Minoren der Hauptdiagonale symmetrische Determinanten.

§ 79.

Die schief symmetrischen Determinanten.

Eine Determinante heisst schief symmetrisch, wenn zwei conjugirte Elemente derselben entgegengesetzt gleich sind. Da den Elementen der Hauptdiagonale dieselbe Eigenschaft zukommen muss, so sind dieselben gleich Null. Die allgemeine Form einer solchen ist daher

1)
$$\varDelta_1 = \begin{vmatrix} 0 & a_{21} & a_{31} & a_{41} \dots a_{n1} \\ -a_{21} & 0 & a_{32} & a_{42} \dots a_{n2} \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 & a_{43} \dots a_{n3} \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & 0 \quad \dots a_{n4} \\ \vdots & & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & -a_{n4} \dots 0 \end{vmatrix}.$$

Vertauschen wir in $\varDelta_1$ die Horizontalreihen mit den Vertikalreihen, so erhalten wir

2)
$$\varDelta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -a_{21} & -a_{31} & -a_{41} & \dots -a_{n1} \\ a_{21} & 0 & -a_{32} & -a_{42} & \dots -a_{n2} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & -a_{43} & \dots -a_{n3} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 & \dots -a_{n4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \dots \quad 0 \end{vmatrix}.$$

Wenn man andererseits jede Horizontalreihe in 1) mit -1 multiplicirt, so wird die rechte Seite von 1) identisch mit der rechten Seite der Gleichung 2), während die linke Seite den Werth $(-1)^n \varDelta_1$ annimmt. Also ist

3)
$$\varDelta_1 = (-1)^n \varDelta_1 .$$

Hier haben wir die beiden Fälle n gerade und n ungerade zu unterscheiden. Im letzteren Falle ergibt sich aus 3)

4)
$$\varDelta_1 = 0.$$

Dieses wichtige Resultat können wir als Lehrsatz aussprechen, wenn wir beachten, dass n den Grad der Determinante angibt:

Ist eine schief symmetrische Determinante von ungeradem Grade, so verschwindet dieselbe.

Bevor wir den Fall n gerade untersuchen, wollen wir einige Eigenschaften der ersten Minoren ableiten.

Zunächst ist

$$\alpha_{11} = \begin{vmatrix} 0 & a_{32} & a_{42} \dots a_{n2} \\ -a_{32} & 0 & a_{43} \dots a_{n3} \\ -a_{42} & -a_{43} & 0 \quad \dots a_{n4} \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{n2} & -a_{n3} & -a_{n4} \dots 0 \end{vmatrix}$$

eine schief symmetrische Determinante. Dasselbe gilt von $\alpha_{22}, \alpha_{33}, \alpha_{44} \dots \alpha_{nn}$. Diese Unterdeterminanten sind von ungeradem Grade, wenn n gerade ist. Sie verschwinden daher bei geradem n.

Um $\alpha_{k\lambda}$ zu bilden, setzen wir in 1) für $a_{k\lambda}$ 1 ein, während wir die übrigen Elemente der $k$ten Vertikal- und der λten Horizontalreihe gleich Null werden lassen.

Anstatt $\alpha_{\lambda k}$ auf dieselbe Weise aus 1) abzuleiten, kann man in 2) die Elemente der $k$ten Vertikal- und der λten Horizontalreihe verschwinden lassen bis auf $a_{\lambda k}$, wofür man 1 schreibt. Multiplicirt man in dem so erhaltenen $\alpha_{\lambda k}$ alle Horizontalreihen mit Ausnahme der λten mit (-1), so wird die entstandene Determinante identisch mit der rechten Seite von $\alpha_{\lambda k}$. Demnach ist

5) $$\alpha_{k\lambda} = (-1)^{n-1} \alpha_{\lambda k}.$$

Ist n gerade, so ist also $\alpha_{k\lambda} = -\alpha_{\lambda k}$, und $\alpha_{\mu\mu} = 0$.

Ist n ungerade, so ist $\Delta_1 = 0$; $\alpha_{k\lambda} = \alpha_{\lambda k}$.

Diese Resultate lassen sich kurz zusammenfassen:

Ist eine schief symmetrische Determinante von geradem Grade, so ist die Determinante des Systems der adjungirten Elemente eine schief symmetrische Determinante. Ist dagegen der Grad der Originaldeterminante ungerade, so verschwindet dieselbe, während die Determinante des Systems der adjungirten Elemente eine symmetrische Determinante ist.

Wir wollen nach diesen allgemeinen Resultaten den Fall des geraden n näher in's Auge fassen. Unter dieser Voraussetzung verschwindet α_{11}; ferner ist α_{11} von ungeradem Grade und selbst schief symmetrisch; daher gilt die Gleichung

6) $$\beta_{k\lambda} = \beta_{\lambda k},$$

wo die β, wie früher, die ersten Minoren von α_{11} bedeuten. Für jede verschwindende Determinante α_{11} ist

$$\beta_{k\lambda} : \beta_{\lambda\lambda} = \beta_{kk} : \beta_{\lambda k};$$

woraus unter Berücksichtigung von 1)

7) $$\beta_{k\lambda} = \pm \sqrt{\beta_{kk} \cdot \beta_{\lambda\lambda}}.$$

Aus der Bedingung $\alpha_{11} = 0$ ergibt sich nach § 72, Gleichung 5)

$$\Delta_1 = -\frac{1}{\beta_{22}}(-a_{21}\beta_{22} - a_{32}\beta_{23} - \cdots - a_{n1}\beta_{2n}) \times$$
$$(a_{21}\beta_{22} + a_{31}\beta_{32} + \cdots + a_{n1}\beta_{n2}),$$

woraus man mit Benutzung von 6) und 7) leicht folgert:

8) $$\Delta_1 = +\frac{1}{\beta_{22}}(a_{21}\beta_{22} + a_{31}\beta_{32} + \cdots + a_{n1}\beta_{n2})^2$$

9) $$\Delta_1 = +(\pm a_{21}\sqrt{\beta_{22}} \pm a_{31}\sqrt{\beta_{33}} \pm a_{41}\sqrt{\beta_{44}} \pm \cdots \pm a_{n1}\sqrt{\beta_{nn}})^2,$$

wenn β_2 positiv ist.

10) $$\Delta_1 = -(\pm a_{21}\sqrt{\beta_{22}} \pm a_{31}\sqrt{\beta_{33}} \pm \cdots \pm a_{n1}\sqrt{\beta_{nn}})^2,$$

wenn β_{22} negativ ist.

β_{22} ist eine schief symmetrische Determinante $(n-2)$ten Grades. Aus 9) und 10) folgt, dass eine schief symmetrische Determinante $n$ten Grades ein positives Quadrat ist, wenn β_{22} positiv ist, wenn also die schief symmetrische Determinante $(n-2)$ten Grades positiv ist. Fahren wir so fort, so ergibt sich, dass eine schief symmetrische Determinante $n$ten Grades positiv ist, wenn diejenige 2ten Grades positiv ist. Die letztere hat die Form

$$\begin{vmatrix} 0 & b_{21} \\ -b_{21} & 0 \end{vmatrix} = +b_{21}^2$$

und ist also stets positiv. Folglich ist jede schief symmetrische Determinante von geradem Grade ein positives Quadrat. Die Gleichung 10) ist unmöglich.

Führt man dieselben Schlüsse durch unter Berücksichtigung der Quadratwurzel, so findet man, dass dieselbe rational ist. Wir wollen jedoch diese Betrachtung durch die folgende ersetzen, wobei gleichzeitig der Bau der Glieder erkannt wird.

Um anzudeuten, dass β_{22} eine Determinante vom $(n-2)$ten Grade ist, wollen wir einen oberen Index $n-2$ hinzufügen.

Nun ist nach der Gleichung 9) abgesehen vom Zeichen

$$\sqrt{\beta_{22}^{n-2}} = \pm a_{43}\sqrt{\beta_{44}^{n-4}} \pm a_{53}\sqrt{\beta_{55}^{n-4}} \pm \ldots \pm a_{n3}\sqrt{\beta_{nn}^{n-4}}.$$

Ferner

$$\sqrt{\beta_{44}^{n-4}} = \pm a_{65}\sqrt{\beta_{66}^{n-6}} \pm a_{75}\sqrt{\beta_{77}^{n-6}} + \ldots$$

$$\sqrt{\beta_{n-2,n-2}^{n-(n-2)}} = \pm a_{n,n-1}.$$

Daher ist das erste Glied der Entwickelung von $\pm a_{21}\sqrt{\beta_{22}}$

$$\pm a_{21}\, a_{43}\, a_{65} \ldots a_{n-2,n-3}\, a_{n,n-1}.$$

Bedenkt man, dass

$$\beta^4{}_{n-4,n-4} =$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{n-2,n-3} & a_{n-1,n-3} & a_{n,n-3} \\ -a_{n-2,n-3} & 0 & a_{n-1,n-2} & a_{n,n-2} \\ -a_{n-1,n-3} & -a_{n-1,n-2} & 0 & a_{n,n-1} \\ -a_{n,n-3} & -a_{n,n-2} & -a_{n,n-1} & 0 \end{vmatrix}$$

ist, dass also nach 9)

$$\sqrt{\beta^4{}_{n-4,n-4}} =$$

$$\pm a_{n-4,n-3}\, a_{n,n-1} \pm a_{n-1,n-3}\, a_{n,n-2} \pm a_{n,n-3}\, a_{n-1,n-2}$$

ist, so ergibt sich als zweites Glied

$$\pm a_{21}\, a_{43}\, a_{65} \ldots a_{n-4,n-5}\, a_{n-1,n-3}\, a_{n,n-2},$$

und als drittes

$$\pm a_{21}\, a_{43}\, a_{65} \ldots a_{n-4,n-5}\, a_{n,n-3}\, a_{n-1,n-2}.$$

Das zweite Glied ist aus dem ersten durch Vertauschung des Index $n-2$ mit $(n-1)$ hervorgegangen, das dritte aus dem zweiten durch Vertauschung des Index $(n-1)$ mit n.

Schreitet man so fort, so findet man, dass alle Glieder von $\pm a_{21}\sqrt{\beta_{22}}$ dadurch aus $a_{21}\, a_{43}\, a_{65}\, a_{87} \ldots a_{n,n-1}$ hervorgehen, dass man die Indices $3\,4\,5\,6 \ldots n-1, n$ auf jede mögliche

Art permutirt, dann jedoch diejenigen nur einmal setzt, welche sich nur durch Vertauschung der beiden Indices eines Buchstabens unterscheiden und daher gleiche Elemente geben.

Das Glied $\pm a_{31} \sqrt{\beta_{33}}$ unterscheidet sich vom Gliede $\pm a_{21} \sqrt{\beta_{22}}$ nur dadurch, dass 3 an die Stelle von 2 getreten ist. Man erhält daher alle hierzu gehörigen Theile, wenn man in jedem Gliede von

$$a_{21} \Sigma a_{43} a_{65} a_{87} \ldots a_{n,n-1}$$

2 mit 3 vertauscht.

Da ähnliches von den übrigen Gliedern in 9) gilt, so erhält man alle Glieder der Grundzahl des Quadrates der rechten Seite in 9) aus

$$a_{21} a_{43} a_{65} \ldots a_{n,n-1}$$

indem man alle Indices

$$2\,3\,4\,5 \ldots n-2, n-1, n$$

permutirt und diejenigen Permutationen nicht als verschieden betrachtet, welche absolut gleiche Elemente mit verschiedenen Vorzeichen, wie a_{43} und a_{34}, erzeugen, oder Produkte mit denselben Elementen in verschiedener Anordnung.

Wie erhält man die Vorzeichen? Entweder kann man durch Vergleichung der Gleichung 9) mit 8) nachweisen, dass es zweckmässig ist, dem ersten Gliede das positive Zeichen zu geben, oder durch folgende Ueberlegung: Da Δ_1 nach 9) ein Quadrat ist, so kann man unter dem Quadrate mit (-1) multipliciren, ohne die Determinante zu ändern. Also kann man allen Gliedern die entgegengesetzten Zeichen geben. Wir wählen als das erste $+$.

Ferner kann man in Δ_1 die $k$te Horizontalreihe mit der parallelen λten vertauschen, wenn man gleichzeitig die $k$te Vertikalreihe mit der λten vertauscht. In der Determinante wird diese Vertauschung dadurch ausgeführt, dass man überall k mit λ vertauscht. Also kann man auch in dem entwickelten Ausdrucke k an die Stelle von λ, und λ an die von k bringen. Wird hierdurch das Vorzeichen irgend eines Gliedes geändert, so müssen sich alle Vorzeichen ändern. Nun wechselt dasjenige Glied das Vorzeichen, welches $a_{k\lambda}$ ent-

hält, weil $a_{k\lambda} = - a_{\lambda k}$ ist; die übrigen Glieder ändern dabei die Vorzeichen nicht. Also müssen je zwei Glieder, die sich nur durch Vertauschung von k und λ unterscheiden, entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Nun hat das erste Glied ein positives Vorzeichen; bildet man also die Glieder durch Vertauschung von je zwei Indices, so wechseln die Zeichen der Glieder ab.

Die etwas schwierige Untersuchung wollen wir von Gleichung 9) an durch ein Beispiel fassbarer machen. Es sei

$$\varDelta_1 = \begin{vmatrix} 0 & a_{21} & a_{31} & a_{41} & a_{51} & a_{61} \\ -a_{21} & 0 & a_{32} & a_{42} & a_{52} & a_{62} \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 & a_{43} & a_{53} & a_{63} \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & 0 & a_{54} & a_{64} \\ -a_{51} & -a_{52} & -a_{53} & -a_{54} & 0 & a_{65} \\ -a_{61} & -a_{62} & -a_{63} & -a_{64} & -a_{65} & 0 \end{vmatrix}.$$

Dann hat man:

$$\beta_{22} = \begin{vmatrix} 0 & a_{43} & a_{53} & a_{63} \\ -a_{43} & 0 & a_{54} & a_{64} \\ -a_{53} & -a_{54} & 0 & a_{65} \\ -a_{63} & -a_{64} & -a_{65} & 0 \end{vmatrix}; \quad \beta_{33} = \begin{vmatrix} 0 & a_{42} & a_{52} & a_{62} \\ -a_{42} & 0 & a_{54} & a_{64} \\ -a_{52} & -a_{54} & 0 & a_{65} \\ -a_{62} & -a_{64} & -a_{65} & 0 \end{vmatrix};$$

$$\beta_{44} = \begin{vmatrix} 0 & a_{32} & a_{52} & a_{62} \\ -a_{32} & 0 & a_{53} & a_{63} \\ -a_{52} & -a_{53} & 0 & a_{65} \\ -a_{62} & -a_{63} & -a_{65} & 0 \end{vmatrix}; \quad \beta_{55} = \begin{vmatrix} 0 & a_{32} & a_{42} & a_{62} \\ -a_{32} & 0 & a_{43} & a_{63} \\ -a_{42} & -a_{43} & 0 & a_{64} \\ -a_{62} & -a_{63} & -a_{64} & 0 \end{vmatrix};$$

$$\beta_{66} = \begin{vmatrix} 0 & a_{32} & a_{42} & a_{52} \\ -a_{32} & 0 & a_{43} & a_{53} \\ -a_{42} & -a_{43} & 0 & a_{54} \\ -a_{52} & -a_{53} & -a_{54} & 0 \end{vmatrix}.$$

Nun ist

$$\varDelta_1 = (\pm a_{21}\sqrt{\beta_{22}} \pm a_{31}\sqrt{\beta_{33}} \pm a_{41}\sqrt{\beta_{44}} \pm a_{51}\sqrt{\beta_{55}} \pm a_{61}\sqrt{\beta_{66}})^2,$$

und mit Hülfe der Determinante für β_{22}

$$\sqrt{\beta_{22}} = \pm a_{43}\sqrt{\beta^2_{44}} \pm a_{53}\sqrt{\beta^2_{55}} \pm a_{63}\sqrt{\beta^2_{66}},$$

wo 2 nur ein Index ist.

$$\sqrt{\beta^2_{44}} = \sqrt{\begin{vmatrix} 0 & a_{65} \\ -a_{65} & 0 \end{vmatrix}} = \pm a_{65}; \sqrt{\beta^2_{55}} = \pm a_{64}; \sqrt{\beta^2_{66}} = \pm a_{54}.$$

$$\pm a_{21} \sqrt{\beta_{21}} = \pm a_{21}\, a_{43}\, a_{65} \pm a_{21}\, a_{53}\, a_{64} \pm a_{21}\, a_{63}\, a_{54}.$$

Durch Vergleichung der Determinante β_{33} mit β_{22} findet man, dass diese sich nur dadurch unterscheiden, dass 2 an die Stelle von 3 getreten ist. Man erhält demnach

$$\pm a_{41} \sqrt{\beta_{33}} = \pm a_{31}\, a_{42}\, a_{65} \pm a_{31}\, a_{52}\, a_{64} \pm a_{31}\, a_{62}\, a_{54}.$$

β_{44} und β_{33} unterscheiden sich durch die Indices 4 und 3. Daher ist

$$\pm a_{41} \sqrt{\beta_{44}} = a_{41}\, a_{32}\, a_{65} \pm a_{41}\, a_{52}\, a_{63} \pm a_{41}\, a_{62}\, a_{53}.$$

Ebenso

$$\pm a_{51} \sqrt{\beta_{66}} = a_{51}\, a_{32}\, a_{64} \pm a_{51}\, a_{42}\, a_{63} \pm a_{51}\, a_{62}\, a_{43}.$$

$$\pm a_{61} \sqrt{\beta_{66}} = a_{61}\, a_{32}\, a_{54} \pm a_{61}\, a_{42}\, a_{53} \pm a_{61}\, a_{52}\, a_{43}.$$

Nachdem wir so die absoluten Werthe der Glieder festgestellt haben, müssen wir die Vorzeichen suchen. Das Glied $a_{21}\, a_{43}\, a_{65}$ ist das Anfangsglied und daher von uns positiv angenommen; das zweite $a_{21}\, a_{53}\, a_{64}$ ist negativ; es geht aus dem ersten durch Vertauschung von 5 und 4 hervor. Das dritte positive folgt aus dem vorangehenden durch Vertauschung von 4 und 3. So erhält man schliesslich

$$\begin{aligned} \Delta_1 = [a_{21}a_{43}a_{65} - a_{21}a_{53}a_{64} + a_{21}a_{54}a_{63} - a_{31}a_{42}a_{65} + a_{31}a_{52}a_{64} \\ - a_{31}a_{62}a_{54} + a_{41}a_{32}a_{65} - a_{41}a_{52}a_{63} + a_{41}a_{62}a_{53} \\ - a_{51}a_{32}a_{64} + a_{51}a_{42}a_{63} - a_{51}a_{62}a_{43} + a_{61}a_{32}a_{54} \\ - a_{61}a_{42}a_{53} + a_{61}a_{52}a_{43}]^2. \end{aligned}$$

Hierbei ist das vierte aus dem ersten Gliede, das fünfte aus dem zweiten, das sechste aus dem dritten, das siebente aus dem vierten u. s. f. abgeleitet.

Richten wir jetzt unsere Aufmerksamkeit auf die Indices. In Δ_1 sind an jedem Elemente die höheren Indices vorn; ein Element von der Form a_{35} kommt nicht vor. Solche Gruppen sind also auch bei der Vertauschung der Indices 2 3 4 5 6 nicht zu wählen. Wenn ferner ein Glied wie $\pm a_{41}\, a_{32}\, a_{65}$ gewählt ist, so kann ein Glied wie $\pm a_{32}\, a_{41}\, a_{65}$ nicht mehr vorkommen; auf die Indices übertragen darf also, wenn die Gruppe 4 1 3 2 6 5

gewählt ist, nicht mehr die andere 32 41 65 oder 41 65 32 genommen werden. Die Bildung der zu wählenden Complexionen ist also auf den zweiten Theil von § 19 zurückgeführt.

§ 80.

Die schiefen Determinanten.

Die schiefen Determinanten unterscheiden sich von den schief symmetrischen nur dadurch, dass die Elemente der Diagonale nicht alle verschwinden. Wir bezeichnen daher diese Elemente mit $a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn}$.

Nun wurde in § 66 allgemein für jede Determinante die Richtigkeit der Gleichung

$$\Delta_1 = D + \sum_1^n a_{kk} D_k + \sum_1^n a_{kk}\, a_{\lambda\lambda}\, D_{k\lambda} + \ldots + a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn}$$

nachgewiesen, wo $D_{k\lambda\mu}$ aus der Originaldeterminante dadurch hervorgeht, dass man die $k$te, λte und μte Horizontal- und Vertikalreihe auslässt und die Elemente der Hauptdiagonale gleich Null setzt.

Ist nun die Originaldeterminante schief und vom $n$ten Grade, so sind D, D_k, $D_{k\lambda}$, $D_{k\lambda\mu}$ etc. schief symmetrisch und vom $n$ten, $(n-1)$ten, $(n-2)$ten, $(n-3)$ten etc. Grade.

Wenn n eine gerade Zahl ist, so sind demnach D, $D_{k\lambda}$, $D_{k\lambda\mu\nu}$ etc. nach dem vorigen § vollständige positive Quadrate, während D_k, $D_{k\lambda\mu}$ etc. verschwinden.

Ist n ungerade, so verschwinden nmgekehrt D, $D_{k\lambda}$ etc., während D_k, $D_{k\lambda\mu}$ etc. vollständige positive Quadrate sind. Diese Quadrate werden nach dem vorigen § einzeln berechnet.

Wir wollen das Princip der Berechnung an den folgenden Beispielen klar machen.

1)
$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ -a_{21} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ -a_{31} & -a_{32} & a_{33} & a_{43} \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ -a_{21} & 0 & a_{32} & a_{42} \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 & a_{43} \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & 0 \end{vmatrix} = (a_{21}\, a_{43} - a_{31}\, a_{42} + a_{41}\, a_{32})^2.$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & a_{32} & a_{42} \\ -a_{32} & 0 & a_{43} \\ -a_{42} & -a_{43} & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

ebenso

$$D_2 = D_3 = D_4 = 0.$$

$$D_{12} = \begin{vmatrix} 0 & a_{43} \\ -a_{43} & 0 \end{vmatrix} = a^2_{43}; \; D_{13} = \begin{vmatrix} 0 & a_{42} \\ -a_{42} & 0 \end{vmatrix} = a^2_{42};$$

ebenso

$$D_{14} = a^2_{32}; \quad D_{23} = a^2_{41}; \quad D_{24} = a^2_{31}; \quad D_{34} = a^2_{21};$$

$$D_{123} = 0;$$

ebenso

$$D_{124} = D_{234} = 0.$$

Also ist

$$\Delta_1 = (a_{21}\, a_{43} - a_{31}\, a_{42} + a_{41}\, a_{32})^2 + a_{11}\, a_{22}\, a^2_{43} + a_{11}\, a_{33}\, a^2_{42} \\ + a_{11}\, a_{44} a^2_{32} + a_{22} a_{33} a^2_{41} + a_{22} a_{44} a^2_{31} + a_{33} a_{44} a^2_{21} + a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}.$$

2)
$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ -a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ -a_{31} & -a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a_{21} & a_{31} \\ -a_{21} & 0 & a_{32} \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & a_{32} \\ -a_{32} & 0 \end{vmatrix} = a^2_{32}; \; D_2 = \begin{vmatrix} 0 & a_{31} \\ -a_{31} & 0 \end{vmatrix} = a^2_{31};$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 0 & a_{21} \\ -a_{21} & 0 \end{vmatrix} = a^2_{21};$$

$$D_{12} = D_{13} = D_{23} = 0.$$

$$\Delta_1 = a_{11}\, a^2_{32} + a_{22}\, a^2_{31} + a_{33}\, a^2_{21} + a_{11}\, a_{22}\, a_{33}.$$

Sind die Glieder der Hauptdiagonale einander gleich, so setzt man nur diesen gleichen Werth für a_{11}, a_{22} etc., während alles übrige ungeändert bleibt. So erhält man z. B.

3)
$$\begin{vmatrix} x & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ -a_{21} & x & a_{32} & a_{42} \\ -a_{31} & -a_{32} & x & a_{43} \\ -a_{41} & -a_{42} & -a_{43} & x \end{vmatrix} = (a_{21}\, a_{43} - a_{31}\, a_{42} + a_{41}\, a_{31})^2$$

$$+ x^2 (a^2_{43} + a^2_{42} + a^2_{32} + a^2_{41} + a^2_{31} + a^2_{21}) + x^4.$$

4) $$\begin{vmatrix} x & a_{21} & a_{31} \\ -a_{21} & x & a_{32} \\ -a_{31} & -a_{32} & x \end{vmatrix} = x(a_{32}^2 + a_{31}^2 + a_{21}^2) + x^3.$$

§ 81.

Aufgaben.

1) Welchen Werth hat

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 7 & 9 & 5 \\ -3 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ -7 & -4 & 0 & 11 & 101 \\ -9 & -2 & -11 & 0 & 2 \\ -5 & -1 & -101 & -2 & 0 \end{vmatrix} ?$$

Antwort: 0.

2) Berechne

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 5 & 7 \\ -1 & -5 & 0 & 4 \\ -2 & -7 & -4 & 0 \end{vmatrix}.$$

Antwort: 225.

3) Berechne

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}.$$

Antwort: $(af - be + cd)^2$.

4) Die Determinante

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & a_{21} & a_{31} \ldots a_{n1} \\ -a_{21} & 0 & a_{32} \ldots a_{n2} \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 \ \ldots a_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} \ldots 0 \end{vmatrix}$$

ist ein Quadrat, wenn n gerade ist. Wie viel Glieder hat die Grundzahl desselben?

Antwort: $1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (n-1)$.

5) Berechne

$$\begin{vmatrix} 1 & b \\ -b & 1 \end{vmatrix}.$$

Antwort: $b^2 + 1$.

6) Berechne

$$\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ -b & 1 & d \\ -c & -d & 1 \end{vmatrix}.$$

Antwort: $d^2 + c^2 + b^2 + 1$.

7) Berechne

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & \mu & -\nu \\ -\lambda & 1 & -\omega & \pi \\ -\mu & \omega & 1 & \varrho \\ +\nu & -\pi & -\varrho & 1 \end{vmatrix}.$$

Antwort:

$$(\lambda\varrho - \mu\pi + \nu\omega)^2 + (\varrho^2 + \pi^2 + \omega^2 + \nu^2 + \mu^2 + \lambda^2) + 1.$$

8)

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \dots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & \dots & -a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & \dots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & & 0 \end{vmatrix}.$$

n ist eine gerade Zahl. Beweise, dass

$$\Delta_1 = \left[\sum_2^n a_{12}\, a_{34}\, a_{56} \dots a_{n-1,n}\right]^2$$

ist.

Dritter Abschnitt.

Lineare Gleichungen und lineare Funktionen.

§ 82.

Vorbemerkungen.

Eine Gleichung, in welcher jedes Glied höchstens eine Unbekannte und nur in der ersten Potenz enthält, heisst eine lineare. Nennt man die Unbekannten derselben x_1, x_2, $x_3 \ldots x_n$, so ist ihre allgemeine Form

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + \cdots + A_n x_n = C.$$

Sind nun n Gleichungen mit n Unbekannten

$$1) \qquad \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + a_{31} x_3 + \cdots + a_{n1} x_n = c_1 \\ a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + a_{32} x_3 + \cdots + a_{n2} x_n = c_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{1n} x_1 + a_{2n} x_2 + a_{3n} x_3 + \cdots + a_{nn} x_n = c_n \end{cases}$$

gegeben, so heisst die aus den Coefficienten gebildete Determinante

$$2) \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \ldots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \ldots & a_{n3} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

die Determinante des Systems der Gleichungen 1).

§ 83.

Auflösung des Systems von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten, wenn $\Delta_1 \gtrless 0$ ist.

Wir bilden zu Δ_1 das System der adjungirten Elemente

$$3) \qquad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} & \ldots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} & \ldots & \alpha_{n2} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \ldots & \alpha_{n3} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \alpha_{3n} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

und erinnern an die Relationen

$$4)\qquad a_{k1}\alpha_{k1}+a_{k2}\alpha_{k2}+\cdots+a_{kn}\alpha_{kn}=\Delta_1,$$

$$5)\qquad a_{k1}\alpha_{\lambda 1}+a_{k2}\alpha_{\lambda 2}+\cdots+a_{\lambda n}\alpha_{kn}=0.$$

Multipliciren wir jetzt die erste der Gleichungen 1) mit α_{11}, die zweite mit α_{12}, ... die $n$te mit α_{1n}, so erhalten wir durch Addition

$$6)\qquad \Delta_1\cdot x_1=c_1\alpha_{11}+c_2\alpha_{12}+\cdots+c_n\alpha_{1n},$$

und da Δ_1 von Null verschieden ist

$$7)\qquad x_1=\frac{c_1\alpha_{11}+c_2\alpha_{12}+\cdots+c_n\alpha_{1n}}{\Delta_1}.$$

Um x_2 zu erhalten, multipliciren wir die erste jener Gleichungen mit α_{21}, die zweite mit α_{22} etc., die $n$te mit α_{2n}. Es wird

$$\Delta_1\cdot x_2=c_1\alpha_{21}+c_2\alpha_{22}+c_3\alpha_{23}+\cdots+c_n\alpha_{2n}$$

und

$$8)\qquad x_2=\frac{c_1\alpha_{21}+c_2\alpha_{22}+c_3\alpha_{23}+\cdots+c_n\alpha_{2n}}{\Delta_1}.$$

Allgemein bekommt man

$$9)\qquad x_k=\frac{c_1\alpha_{k1}+c_2\alpha_{k2}+c_3\alpha_{k3}+\cdots+c_n\alpha_{kn}}{\Delta_1}.$$

Die Dividenden der Quotienten auf der rechten Seite der Gleichungen 7), 8) und 9) sind ebenfalls Determinanten. Der Dividendus in 7) geht aus der Determinante Δ_1 durch Vertauschung der ersten Vertikalreihe mit $c_1, c_2, \ldots c_n$ hervor. Setzt man $c_1, c_2 \ldots c_n$ an die Stelle der $k$ten Vertikalreihe in Δ_1, so ergibt sich der Dividendus in 9).

§ 84.

Beispiel.

Wir wollen an einem Beispiel die Auflösung der linearen Gleichungen unter der Voraussetzung erläutern, dass ebensoviele Gleichungen wie Unbekannte vorhanden sind und die Determinante nicht verschwindet.

$$\begin{aligned}
x+y+z+t+u &= 5\\
x+y+z+t+v &= 3\\
x+y+z+u+v &= 1\\
x+y+t+u+v &= 7\\
x+z+t+u+v &= 9\\
y+z+t+u+v &= 11.
\end{aligned}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1&1&1&1&1&0\\ 1&1&1&1&0&1\\ 1&1&1&0&1&1\\ 1&1&0&1&1&1\\ 1&0&1&1&1&1\\ 0&1&1&1&1&1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0&0&0&0&1&-1\\ 0&0&0&1&-1&0\\ 0&0&1&-1&0&0\\ 0&1&-1&0&0&0\\ 1&-1&0&0&0&0\\ 0&1&1&1&1&1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0&0&0&0&0&-1\\ 0&0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&-1&0&0\\ 0&0&-1&0&0&0\\ 0&-1&0&0&0&0\\ 5&5&4&3&2&1 \end{vmatrix} = +5.$$

$$\delta_x = \begin{vmatrix} 5&1&1&1&1&0\\ 3&1&1&1&0&1\\ 1&1&1&0&1&1\\ 7&1&0&1&1&1\\ 9&0&1&1&1&1\\ 11&1&1&1&1&1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5&1&1&1&1&0\\ 2&0&0&1&-1&1\\ 0&0&0&0&0&1\\ 6&0&-1&1&0&1\\ 8&-1&0&1&0&1\\ 10&0&0&1&0&1 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 5&1&1&1&1\\ 2&0&0&1&-1\\ 6&0&-1&1&0\\ 8&-1&0&1&0\\ 10&0&0&1&0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5&1&1&1&1\\ 7&1&1&2&0\\ 6&0&-1&1&0\\ 8&-1&0&1&0\\ 10&0&0&1&0 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 7&1&1&2\\ 6&0&-1&1\\ 8&-1&0&1\\ 10&0&0&1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 7&1&1&2\\ 13&1&0&3\\ 8&-1&0&1\\ 10&0&0&1 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 13 & 1 & 3 \\ 8 & -1 & 1 \\ 10 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 13 & 1 & 3 \\ 21 & 0 & 4 \\ 10 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= +\begin{vmatrix} 21 & 4 \\ 10 & 1 \end{vmatrix} = -19.$$

$$\delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 11 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -9.$$

$$\delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 7 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 9 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 11 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = +1.$$

Ebenso

$$\delta_t = +31; \quad \delta_u = +21; \quad \delta_v = +11.$$

Hiermit wird

$$x = -3\tfrac{4}{5}; \quad y = -1\tfrac{4}{5}; \quad z = \tfrac{1}{5}; \quad t = 6\tfrac{1}{5};$$

$$u = 4\tfrac{1}{5}; \quad v = 2\tfrac{1}{5}.$$

§ 85.

$(n+1)$ Gleichungen mit n Unbekannten.

Das Resultat des § 83 lässt sich so aussprechen: Sind eben so viele Gleichungen als Unbekannte gegeben und verschwindet die Determinante des Systems der Gleichungen nicht, so sind die Werthe der Unbekannten eindeutig bestimmt.

Ist nun aber eine Gleichung mehr gegeben als Unbekannte, so kann dieses System im Allgemeinen nicht aufgelöst werden. Es entsteht daher die Frage, unter welchen Bedingungen in diesem Falle Auflösungen existiren.

Das System der Gleichungen sei

$$\begin{array}{lllll}
a_{11}\,x_1 & + a_{21}\,x_2 & + \ldots + a_{n1}\,x_n & = c_1 \\
a_{12}\,x_1 & + a_{22}\,x_2 & + \ldots + a_{n2}\,x_n & = c_2 \\
\vdots & & & \\
a_{1n}\,x_1 & + a_{2n}\,x_2 & + \ldots + a_{nn}\,x_n & = c_n \\
a_{1,n+1}\,x_1 & + a_{2,n+1}\,x_2 & + \ldots + a_{n,n+1}\,x_n & = c_{n+1}.
\end{array}$$

Wir setzen

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta_1$$

und nehmen wie früher $\Delta_1 \gtrless 0$ an. Unter dieser Voraussetzung lässt sich das System der ersten n Gleichungen auflösen. Man erhält

$$x_1 = \frac{\delta_1}{\Delta_1};\ x_2 = \frac{\delta_2}{\Delta_1}; \ldots x_k = \frac{\delta_k}{\Delta_1}; \ldots x_n = \frac{\delta_n}{\Delta_1};$$

wo δ_k aus Δ_1 dadurch hervorgeht, dass man darin die $k$te Vertikalreihe durch die Elemente $c_1, c_2 \ldots c_n$ ersetzt.

Soll die $(n+1)$te Gleichung durch diese Werthe ebenfalls befriedigt werden, so muss

$$1)\quad a_{1,n+1}\,\delta_1 + a_{2,n+1}\,\delta_2 + \ldots + a_{n,n+1}\,\delta_n = c_{n+1}\,\Delta_1$$

sein.

Nun ist

$$2)\quad \begin{cases} \delta_1 = c_1\,\alpha_{11} + c_2\,\alpha_{12} + \ldots + c_n\,\alpha_{1n} \\ \delta_2 = c_1\,\alpha_{21} + c_2\,\alpha_{22} + \ldots + c_n\,\alpha_{2n} \\ \vdots \\ \delta_n = c_1\,\alpha_{n1} + c_2\,\alpha_{n2} + \ldots + c_n\,\alpha_{nn}. \end{cases}$$

Multipliciren wir die erste dieser Gleichungen mit $a_{1,n+1}$, die zweite mit $a_{2,n+1}$ u. s. f., so ergibt sich

$$3)\quad a_{1,n+1}\,\delta_1 + a_{2,n+1}\,\delta_2 + \ldots + a_{n,n+1}\,\delta_n = \sum_1^n c_\mu\, a_{\nu,n+1}\,\alpha_{\mu,\nu}.$$

Schreiben wir ferner

4)
$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots a_{n1} & c_1 \\ a_{12} & a_{22} & \dots a_{n2} & c_2 \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots a_{nn} & c_n \\ a_{1,n+1} & a_{2,n+1} & \dots a_{n,n+1} & c_{n+1} \end{vmatrix},$$

so folgt aus § 65 die Gleichung

5)
$$\varDelta = c_{n+1}\,\varDelta_1 - \sum_1^n c_\mu\, a_{\nu,n+1}\,\alpha_{\mu,\nu}.$$

Die Gleichungen 1), 3) und 5) ergeben den Werth

6)
$$\varDelta = 0.$$

Da $\varDelta = 0$ ist, so ist auch

$$-\varDelta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots a_{n1} & -c_1 \\ a_{12} & a_{22} & \dots a_{n2} & -c_2 \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots a_{nn} & -c_n \\ a_{1,n+1} & a_{2,n+1} & \dots a_{n,n+1} & -c_{n+1} \end{vmatrix} = 0,$$

so dass, wenn die Gleichungen in der Form

$$\begin{array}{lllll} a_{11}\,x_1 & + a_{21}\,x_2 & + \dots + a_{n1}\,x_n & + a_{n+1,1} & = 0 \\ a_{12}\,x_1 & + a_{22}\,x_2 & + \dots + a_{n2}\,x_n & + a_{n+1,2} & = 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{1n}\,x_1 & + a_{2n}\,x_2 & + \dots + a_{nn}\,x_n & + a_{n+1,n} & = 0 \\ a_{1,n+1}\,x_1 & + a_{2,n+1}\,x_2 & + \dots + a_{n,n+1}\,x_n & + a_{n+1,n+1} & = 0 \end{array}$$

gegeben sind, als Bedingung der Auflösbarkeit

$$\sum \pm a_{11}\,a_{22}\dots a_{n+1,n+1} = 0$$

hingeschrieben werden kann.

In dieser Determinante ist $\varDelta_1$ die letzte Unterdeterminante, welche nicht verschwinden darf.

§ 86.

Verallgemeinerung des Vorigen.

Sind $(n+m)$ Gleichungen zwischen n Unbekannten gegeben, so ergeben sich m Bedingungsgleichungen. Es sei nämlich das System der Gleichungen

$$1)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{n1}x_n = c_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{n2}x_n = c_2 \\ \vdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = c_n \\ a_{1,n+1}x_1 + a_{2,n+1}x_2 + \ldots + a_{n,n+1}x_n = c_{n+1} \\ a_{1,n+2}x_1 + a_{2,n+2}x_2 + \ldots + a_{n,n+2}x_n = c_{n+2} \\ \vdots \\ a_{1,n+m}x_1 + a_{2,n+m}x_2 + \ldots + a_{n,n+m}x_n = c_{n+m}. \end{cases}$$

Ferner sei

$$2)\quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \ldots a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} \ldots a_{n2} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

Man löst nun, wie früher, das System der n ersten Gleichungen auf, und erhält die Werthe

$$3)\quad x_1 = \frac{\delta_1}{\Delta_1};\ x_2 = \frac{\delta_2}{\Delta_1};\ \ldots x_n = \frac{\delta_n}{\Delta_1}.$$

Soll durch diese Werthe auch die $(n+1)$te Gleichung befriedigt werden, so muss nach dem vorigen §

$$4)\quad \overset{I}{\Delta} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots a_{n1}, & c_1 \\ a_{12} & a_{22} & \ldots a_{n2}, & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots a_{nn}, & c_n \\ a_{1,n+1} & a_{2,n+1} & \ldots a_{n,n+1}, & c_{n+1} \end{vmatrix} = 0$$

sein.

Setzt man die Werthe 3) in die $(n+2)$te Gleichung ein, so erhält man die Bedingungsgleichung

$$
5) \qquad \overset{II}{\Delta} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots a_{n1}, & c_1 \\ a_{12} & a_{22} & \ldots a_{n2}, & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots a_{nn}, & c_n \\ a_{1,n+2} & a_{2,n+2} & \ldots a_{n,n+2}, & c_{n+2} \end{vmatrix} = 0.
$$

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens ergeben sich im Ganzen m Bedingungsgleichungen, deren letzte

$$
\overset{m}{\Delta} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots a_{n1}, & c_1 \\ a_{12} & a_{22} & \ldots a_{n2}, & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots a_{nn}, & c_n \\ a_{1,n+m} & a_{2,n+m} & \ldots a_{n,n+m}, & c_{n+m} \end{vmatrix} = 0
$$

ist.

Das bisherige Ergebniss lässt sich kurz zusammenfassen: Sind mehr Gleichungen als Unbekannte gegeben und verschwindet die Determinante Δ_1 nicht, so lässt sich das System der gegebenen Gleichungen auflösen und nur auflösen, wenn die Determinanten $\overset{I}{\Delta}, \overset{II}{\Delta} \ldots \overset{m}{\Delta}$ verschwinden.

§ 87.

Beispiel.

Das System

$$
\begin{aligned}
x + y + z + t + u &= 5 \\
x + y + z + t + v &= 3 \\
x + y + z + u + v &= 1 \\
x + y + t + u + v &= 7 \\
x + z + t + u + v &= 9 \\
y + z + t + u + v &= 11 \\
-x + z + t + u + v &= \frac{83}{5} \\
-y + z + t - u \quad &= 4 \\
2z + t + u + v &= 13
\end{aligned}
$$

ist gegeben. Es enthält 6 Unbekannte und besteht aus 9 Gleichungen.

Setzt man die in § 84 gefundenen Werthe der Unbekannten, welche die ersten sechs Gleichungen befriedigen, in die drei letzten ein, so findet man, dass diese identisch erfüllt werden, dass jene Auflösungen demnach auch Auflösungen des hier vorgelegten Systemes sind.

Will man, ohne jene Auflösungen zu kennen, wissen, ob überhaupt solche existiren, so berechnet man

$$\overset{I}{\varDelta} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 11 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{83}{5} \end{vmatrix}$$

und findet 0, ebenso $\overset{II}{\varDelta} = 0$, $\overset{III}{\varDelta} = 0$, woraus die Auflösbarkeit folgt, da ausserdem $\varDelta_1 > 0$ ist.

§ 88.

Auflösung eines Systems von m Gleichungen mit $(m + \nu)$ Unbekannten.

Das gegebene System von Gleichungen sei

$$1)\left\{\begin{array}{l} a_{11}\, x_1 + a_{21}\, x_2 + \cdots + a_{m1}\, x_m + a_{m+1,1}\, x_{m+1} + \cdots + a_{m+\nu,1}\, x_{m+\nu} = c_1 \\ a_{12}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \cdots + a_{m2}\, x_m + a_{m+1,2}\, x_{m+1} + \cdots + a_{m+\nu,2}\, x_{m+\nu} = c_2 \\ \vdots \\ a_{1m} x_1 + a_{2m} x_2 + \cdots + a_{mm} x_m + a_{m+1,m} x_{m+1} + \cdots + a_{m+\nu,m} x_{m+\nu} = c_{m+\nu}. \end{array}\right.$$

Ferner wollen wir von der Determinante

$$2) \qquad \varDelta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

voraussetzen, dass sie nicht verschwindet.

Wir geben den ν letzten Unbekannten x_{m+1}, $x_{m+2} \ldots x_{m+\nu}$ beliebige Werthe

$$3) \qquad x'_{m+1}, \quad x'_{m+2}, \quad x'_{m+3}, \cdots x'_{m+\nu},$$

und transponiren dann die diese Unbekannten enthaltenden Glieder. Dadurch nimmt das System 1) die Form

$$4)\begin{cases} a_{11}\,x_1+a_{21}\,x_2+\cdots+a_{m1}\,x_m=c_1-a_{m+1,1}\,x'_{m+1}-\cdots-a_{m+\nu,1}\,x'_{m+\nu}=C_2\\ a_{12}\,x_1+a_{22}\,x_2+\cdots+a_{m2}\,x_m=c_2-a_{m+1,2}\,x'_{m+1}-\cdots-a_{m+\nu,2}\,x'_{m+\nu}=C_2\\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots\\ a_{1m}\,x_1+a_{2m}\,x_2+\cdots+a_{mm}\,x_m=c_m-a_{m+1,m}\,x'_{m+1}-\cdots-a_{m+\nu,m}\,x'_{m+\nu}=C_m \end{cases}$$

an. Da dieses System eben so viele Unbekannte als Gleichungen enthält, und da die Determinante Δ_1 dieses Systems nicht verschwindet, so kann dasselbe aufgelöst werden, und zwar findet man, wenn x_k eine beliebige der Unbekannten x_1, x_2 ... x_m ist,

$$5)\qquad x_k=\frac{\delta_k}{\Delta_1},$$

wo δ_k aus Δ_1 dadurch erzeugt wird, dass man die Elemente der $k$ten Vertikalreihe durch C_1, C_2 ... C_m ersetzt.

Nun kann man den Unbekannten x_{m+1}, x_{m+2} ... $x_{m+\nu}$ auf unendlich viele Arten beliebige Werthe geben, so dass man auch unendlich viele verschiedene C_1, C_2 ... C_m und somit unendlich viele Auflösungen des Systems 1) erhält.

Die Frage nach der Auflösung jenes Systemes ist hiermit erledigt. Es sind hier aber ν Unbekannte vor den anderen ausgezeichnet, wodurch auch die Auflösungen selbst ihre Symmetrie verloren haben. Anstatt ν Unbekannten bestimmte Werthe beizulegen, wollen wir annehmen, es seien $\nu+1$ von den unendlich vielen Auflösungen gefunden, nämlich

$$6)\begin{cases} x_1^{\,1}, & x_2^{\,1}, & x_3^{\,1}, & \ldots\; x^1_{m+\nu},\\ x_1^{\,2}, & x_2^{\,2}, & x_3^{\,2}, & \ldots\; x^2_{m+\nu},\\ \vdots & & & \vdots\\ x_1^{\,\nu+1}, & x_2^{\,\nu+1}, & x_3^{\,\nu+1}, & \ldots\; x^{\nu+1}_{m+\nu}, \end{cases}$$

wo die oberen Zahlen nur Indices sind und andeuten, dass die x_1, x_2 ... $x_{m+\nu}$, welche denselben oberen Index haben, das System 1) befriedigen.

Ferner nehmen wir beliebige Grössen

$$7)\qquad \varphi_1,\quad \varphi_2,\quad \varphi_3\;\ldots\;\varphi_\nu,\quad \varphi_{\nu+1}$$

an, multipliciren die $x_1^{\,1}$, $x_2^{\,1}$ ... $x^1_{m+\nu}$ mit φ_1, die $x_1^{\,2}$, $x_2^{\,2}$

$\ldots x^2_{m+\nu}$ mit φ_2 u. s. f., addiren die untereinander stehenden Produkte und schreiben

$$8)\left\{\begin{array}{l} x_1 \quad\;\; = \varphi_1 x_1^{\,1} \quad + \varphi_2 x_1^{\,2} \quad + \varphi_3 x_1^{\,3} \quad + \cdots + \varphi_{\nu+1} x_1^{\,\nu+1} \\ x_2 \quad\;\; = \varphi_1 x_2^{\,1} \quad + \varphi_2 x_2^{\,2} \quad + \varphi_3 x_2^{\,3} \quad + \cdots + \varphi_{\nu+1} x_2^{\,\nu+1} \\ \vdots \\ x_{m+\nu} = \varphi_1 x^1_{m+\nu} + \varphi_2 x^2_{m+\nu} + \varphi_3 x^3_{m+\nu} + \cdots + \varphi_{\nu+1} x^{\nu+1}_{m+\nu} \end{array}\right.$$

Um nun die Bedingungen zu finden, die die Grössen 7) erfüllen müssen, damit 8) die Auflösungen des Systems 1) werden, setzen wir die Werthe 8) in 1) ein und ordnen. Aus der linken Seite der ersten der Gleichungen 1) wird so

$$\begin{array}{l} \varphi_1 (a_{11} x_1^{\,1} + a_{21} x_2^{\,1} + \cdots + a_{m+\nu,1}\, x^1_{m+\nu}) + \\ + \varphi_2 (a_{11} x_1^{\,2} + a_{21} x_2^{\,2} + \cdots + a_{m+\nu,1}\, x^2_{m+\nu}) + \\ + \varphi_3 (a_{11} x_1^{\,3} + a_{21} x_2^{\,3} + \cdots + a_{m+\nu,1}\, x^2_{m+\nu}) + \cdots \\ \vdots \\ \varphi_{\nu+1} \left(a_{11} x_1^{\,\nu+1} + a_{21} x_2^{\,\nu+1} + \cdots + a_{m+\nu,1} x^{\nu+1}_{m+\nu}\right). \end{array}$$

Nach der Annahme 6) hat jede Klammer den Werth c_1; demnach ist der Werth der ganzen Summe $c_1(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \cdots + \varphi_{\nu+1})$.

Soll also das System 8) die erste Gleichung in 1) befriedigen, so muss

$$9) \qquad \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \cdots + \varphi_{\nu+1} = 1$$

sein.

Dieselbe Bedingung ergibt sich aus den übrigen Gleichungen.

Gibt man demnach den $\nu + 1$ Grössen $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_{\nu+1}$ auf unendlich viele Arten solche Werthe, dass die Bedingung 9) erfüllt ist, so gibt das System 8) eben so viele Auflösungen des Systems der Gleichung 1).

Wir müssen noch zeigen, dass 8) jede mögliche Lösung und jede nur einmal liefert.

Es sei

$$\xi_1, \quad \xi_2 \ldots \xi_m, \quad \xi_{m+1} \ldots \xi_{m+\nu}$$

eine beliebige Lösung des Systems 1). Soll diese bereits in 8) enthalten sein, so muss man die Grössen $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_{\nu+1}$ so bestimmen können, dass

$$10)\quad \begin{cases} \xi_1 = \varphi_1 x_1^1 + \varphi_2 x_1^2 + \cdots + \varphi_{\nu+1} x_1^{\nu+1} \\ \xi_2 = \varphi_1 x_2^1 + \varphi_2 x_2^2 + \cdots + \varphi_{\nu+1} x_2^{\nu+1} \\ \vdots \\ \xi_m = \varphi_1 x_m^1 + \varphi_2 x_m^2 + \cdots + \varphi_{\nu+1} x_m^{\nu+1} \\ \xi_{m+1} = \varphi_1 x_{m+1}^1 + \varphi_2 x_{m+1}^2 + \cdots + \varphi_{\nu+1} x_{m+1}^{\nu+1} \\ \vdots \\ \xi_{m+\nu} = \varphi_1 x_{m+\nu}^1 + \varphi_2 x_{m+\nu}^2 + \cdots + \varphi_{\nu+1} x_{m+1}^{\nu+1} \end{cases}$$

wird.

Die Gleichungen

$$11)\quad \begin{cases} \xi_{m+1} = x_{m+1}^1 \varphi_1 + x_{m+1}^2 \varphi_2 + \cdots + x_{m+1}^{\nu+1} \varphi_{\nu+1} \\ \vdots \\ \xi_{m+\nu} = x_{m+\nu}^1 \varphi_1 + x_{m+\nu}^2 \varphi_2 + \cdots + x_{m+\nu}^{\nu+1} \varphi_{\nu+1} \\ 1 = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_{\nu+1} \end{cases}$$

enthalten $(\nu+1)$ Unbekannte. Die Determinante

$$12)\quad \begin{vmatrix} x_{m+1}^1 & x_{m+1}^2 & \cdots & x_{m+1}^{\nu+1} \\ \vdots \\ x_{m+\nu}^1 & x_{m+\nu}^2 & \cdots & x_{m+\nu}^{\nu+1} \\ 1 & 1 & & 1 \end{vmatrix}$$

verschwindet nicht, da nach dem ersten Theile dieses § die $x_{m+1} \ldots x_{m+\nu}$ willkürlich angenommen werden können, also auch so, dass jene Determinante grösser oder kleiner als Null wird. Daher werden durch die Gleichungen 11) die Grössen $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_{\nu+1}$ eindeutig bestimmt.

Wenn ferner die Grössen $x_{m+1}, x_{m+2} \ldots x_{m+\nu}$, so sind durch die Gleichungen 1) auch die Unbekannten $x_1, x_2 \ldots x_m$ eindeutig bestimmt. Da demnach

$$x_{m+1} = \xi_{m+1}, \ldots x_{m+\nu} = \xi_{m+\nu}$$

ist, so muss auch

$$x_1 = \xi_1,\ x_2 = \xi_2, \ldots x_m = \xi_m$$

sein, d. h. die Auflösung $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_{m+\nu}$ ist bereits in dem Systeme 8) enthalten und nur einmal enthalten.

Das System 8) liefert also alle Auflösungen und jede nur einmal.

§ 89.

Beispiel.

Gegeben seien

$$1)\qquad \begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ -x + 3y - 2z = 4. \end{cases}$$

Wir geben z einen beliebigen Werth ζ, transponiren und lösen auf wie folgt

$$x + 2y = 5 - 3\zeta$$
$$-x + 3y = 4 + 2\zeta;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5; \quad \delta_x = \begin{vmatrix} 5 - 3\zeta, & 2 \\ 4 + 2\zeta, & 3 \end{vmatrix} = 7 - 13\zeta;$$

$$\delta_y = \begin{vmatrix} 1, & 5 - 3\zeta \\ -1, & 4 + 2\zeta \end{vmatrix} = 9 - \zeta.$$

Also wird

$$x = \frac{7}{5} - \frac{13}{5}\zeta, \quad y = \frac{9}{5} - \frac{1}{5}\zeta.$$

Gibt man ζ alle Werthe, so erhält man alle Werthe von x und y.

Wir machen jetzt das Resultat eleganter: wir suchen mit Hülfe der Lösungen 2) oder auch direkt aus den Aufgaben 1) zwei Werthsysteme, welche 1) befriedigen, z. B.

$$x' = -\ 9; \quad y' = +1; \quad z' = +\ 4;$$
$$x'' = -35; \quad y'' = -1; \quad z'' = +14.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} x &= \varphi_1 x' + \varphi_2 x'' = -9\varphi_1 - 35\varphi_2 \\ y &= \varphi_1 y' + \varphi_2 y'' = \ \ 1\varphi_1 - \ 1\varphi_2 \\ z &= \varphi_1 z' + \varphi_2 z'' = \ \ 4\varphi_1 + 14\varphi_2 \\ &\quad \varphi_1 \ \ + \varphi_2 \ \ = 1 \end{aligned}$$

das System der Auflösungen der Gleichungen 1). Hieraus gewinnt man alle Auflösungen, wenn man φ_1 und φ_2 alle möglichen Werthe gibt; setzt man z. B.

$$\varphi_1 = -1, \text{ so ist } \varphi_2 = +2,$$

und die entsprechenden Werthe der Unbekannten sind

$$x = -61; \quad y = -3; \quad z = +24.$$

Hat φ_1 den Werth $+1$, so hat φ_2 den Werth Null, und es wird

$$x = -9; \quad y = 1; \quad z = 4$$

die entsprechende Auflösung.

§ 90.

n lineare Gleichungen mit n Unbekannten und $\Delta_1 = 0$.

Die vorigen Untersuchungen waren noch an die Bedingung $\Delta_1 \gtrless 0$ geknüpft. Diese wollen wir jetzt fallen lassen.

Es sei das System der gegebenen Gleichungen

$$\begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + \dots + a_{n1} x_n = c_1 \\ a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{n3} x_n = c_2 \\ \vdots \\ a_{1n} x_1 + a_{2n} x_2 + \dots + a_{nn} x_n = c_n , \end{array}$$

und die Determinante desselben

$$\Delta_1 = \left| \begin{array}{ll} a_{11} & a_{21} \dots a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} \dots a_{n2} \\ \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} \dots a_{nn} \end{array} \right| = 0.$$

Bilden wir die Unterdeterminanten $\alpha_{k1}, \alpha_{k2} \dots \alpha_{kn}$, multipliciren die beiden Seiten der ersten Gleichung mit α_{k1}, der zweiten mit $\alpha_{k2}, \dots$ der $n$ten mit α_{kn} und addiren, so erhält man

$$\Delta_1 x_k = c_1 \alpha_{k1} + c_2 \alpha_{k2} + \dots + c_n \alpha_{kn} = \delta_k .$$

Da $\Delta_1 = 0$ ist, so ist entweder $x_k = \infty$, oder $\delta_k = 0$. Dasselbe gilt für x_1, δ_1; x_2, δ_2; $\dots x_n, \delta_n$.

Verschwindet also die Determinante eines Systems von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten, so werden die Gleichungen durch endliche Werthe nur dann befriedigt, wenn auch $\delta_1, \delta_2 \dots \delta_n$ verschwinden. In diesem Falle werden die Gleichungen durch jeden beliebigen Werth der Unbekannten befriedigt.

§ 91.

Homogene lineare Gleichungen.

Hat eine Gleichung die Form

$$B_1 x_1 + B_2 x_2 + \ldots + B_n x_n = 0,$$

so heisst sie eine homogene lineare.

Das System

$$1)\qquad \begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{21}\, x_2 + \ldots + a_{n1}\, x_n = 0 \\ a_{12}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots + a_{n2}\, x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{1n}\, x_1 + a_{2n}\, x_2 + \ldots + a_{nn}\, x_n = 0 \end{cases}$$

wird durch die selbstverständlichen Auflösungen

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0, \ldots x_n = 0.$$

befriedigt.

Soll es noch andere Auflösungen besitzen, soll z. B. x_n von Null verschieden sein, so kann man durch x_n dividiren, wodurch das System 1) übergeht in

$$2)\qquad \begin{cases} a_{11}\dfrac{x_1}{x_n} + a_{21}\dfrac{x_2}{x_n} + \ldots + a_{n-1,1}\dfrac{x_{n-1}}{x_n} + a_{n1} = 0 \\ a_{12}\dfrac{x_1}{x_n} + a_{22}\dfrac{x_2}{x_n} + \ldots + a_{n-1,2}\dfrac{x_{n-1}}{x_n} + a_{n1} = 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{1n}\dfrac{x_1}{x_n} + a_{2n}\dfrac{x_2}{x_n} + \ldots + a_{n-1,n}\dfrac{x_{n-1}}{x_n} + a_{nn} = 0. \end{cases}$$

Dieses System von n Gleichungen enthält nur $(n-1)$ Unbekannte und kann daher nach § 85 aufgelöst werden und nur aufgelöst werden, wenn

$$3)\qquad R = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \ldots a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} \ldots a_{n2} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

und

$$4)\qquad \alpha_{nn} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots a_{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1,n-1} & a_{2,n-1} & \ldots a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} \gtrless 0$$

ist. Unter diesen Voraussetzungen erhält man

5) $$\frac{x_k}{x_n} = \frac{\delta_k}{\alpha_{nn}},$$

wo

$$\delta_k = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots a_{k-1,1} & a_{n1} & a_{k+1,1} & \dots a_{n-1,1} \\ \vdots & & & & & \\ a_{1,n-1} & a_{2,n-1} & \dots a_{k-1,n-1} & a_{n,n-1} & a_{k+1,n-1} & \dots a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-k} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots a_{k-1,1} & a_{k+1,1} & \dots a_{n1} \\ \vdots & & & & \\ a_{1,n-1} & a_{2,n-1} & \dots a_{k-1,n-1} & a_{k+1,n-1} & \dots a_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

oder kurz

$$= (-1)^{n-k} \cdot \mathfrak{C} \quad \text{ist.}$$

Nennt man α_{kn} die a_{kn} adjungirte Unterdeterminante, so ist

$$\alpha_{kn} = (-1)^{n+k} \mathfrak{C} = (-1)^{n-k} (-1)^{2k} \mathfrak{C} = (-1)^{n-k} \mathfrak{C}$$
$$= \delta_k.$$

Also ergibt sich

6) $$\frac{x_k}{x_n} = \frac{\alpha_{kn}}{\alpha_{nn}}.$$

Ebenso ist

$$\frac{x_1}{x_n} = \frac{\alpha_{1n}}{\alpha_{nn}}; \quad \frac{x_2}{x_n} = \frac{\alpha_{2n}}{\alpha_{nn}}; \quad \frac{x_3}{x_n} = \frac{\alpha_{3n}}{\alpha_{nn}} \dots \frac{x_{n-1}}{x_n} = \frac{\alpha_{n-1,n}}{\alpha_{nn}}.$$

Diese Gleichungen lassen sich in die eine

7) $$x_1 : x_2 : x_3 : \dots : x_n = \alpha_{1n} : \alpha_{2n} : \dots : \alpha_{nn}$$

zusammenziehen.

Ferner hat man nach § 71

$$\alpha_{1n} : \alpha_{2n} : \dots \alpha_{nn} = \alpha_{1\lambda} : \alpha_{2\lambda} : \dots \alpha_{n\lambda},$$

also auch allgemein

$$x_1 : x_2 : x_3 : \dots x_n = \alpha_{1\lambda} : \alpha_{2\lambda} : \alpha_{3\lambda} \dots \alpha_{n\lambda}.$$

Da man das System der Gleichungen beliebig ordnen kann, so lässt sich 4) durch die Voraussetzung ersetzen, dass e i n e Unterdeterminante von 3) nicht verschwindet.

R nennt man die Resultante der gegebenen Gleichungen. Daher drückt die Formel 8) den Satz aus:

Verschwindet die Resultante von n linearen homogenen Gleichungen und ist wenigstens eine Unterdeterminante von Null verschieden, so verhalten sich die Unbekannten wie die Unterdeterminanten einer beliebigen Vertikalreihe, wo diese jedoch eine nicht verschwindende Unterdeterminante enthalten muss.

Wie andere Systeme homogener, linearer Gleichungen behandelt werden, ergibt sich hieraus von selbst. Wir übergehen sie daher.

§ 92.

Anmerkungen.

Es ist gut, die erhaltenen Resultate von einem anderen Gesichtspunkte aufzufassen: Man kann sich die Aufgabe stellen, aus gegebenen Gleichungen gewisse Grössen zu eliminiren.

Um nun z. B. aus dem Systeme 1) von § 91 die Unbekannten zu eliminiren, könnte man alle Gleichungen durch x_n dividiren, die Werthe der Quotienten der Unbekannten aus den $(n - 1)$ ersten Gleichungen bestimmen und die erhaltenen Werthe in die letzte Gleichung einsetzen. Die linke Seite ist aber weiter gar nichts als die Determinante R; hierdurch ergibt sich der Satz:

Das Resultat der Elimination aus n homogenen linearen Gleichungen mit der gleichen Zahl Unbekannten erhält man, wenn man die Resultante gleich Null setzt.

Ebenso lassen sich die Untersuchungen in §§ 85, 86, 88, 90 als Resultate von Eliminationen auffassen. Aus § 85 würde man z. B. den Satz gewinnen:

Um aus einem Systeme von $n + 1$ linearen Gleichungen mit n Unbekannten die letzteren zu eliminiren, braucht man nur die Determinante $\Delta = 0$ zu setzen.

§ 93.

Aufgaben.

1)
$$3x + 15y = 4$$
$$2x - 4y = -5.$$

Antwort: $x = -\frac{59}{42}$; $y = +\frac{23}{42}$.

2)
$$21x + 8y + 1 = 0$$
$$12x - y + 3 = 0.$$

Antwort: $x = -\frac{25}{117}$; $y = +\frac{51}{117} = +\frac{17}{39}$.

3)
$$ax + by + c = 0$$
$$a_1x + b_1y + c_1 = 0.$$

Antwort: $x = \frac{bc_1 - cb_1}{ab_1 - ba_1}$; $y = \frac{ca_1 - ac_1}{ab_1 - ba_1}$.

Man achte auf die cyklische Anordnung.

4)
$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$$
$$\frac{x}{\alpha_1} + \frac{y}{\beta_1} = 1.$$

Antwort: $x = \frac{\alpha\alpha_1(\beta - \beta_1)}{\alpha_1\beta - \beta_1\alpha}$; $y = \frac{\beta\beta_1(\alpha_1 - \alpha)}{\alpha_1\beta - \beta_1\alpha}$.

5)
$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$$
$$x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 = p_1.$$

Antwort:
$$x = \frac{p\sin\alpha_1 - p_1\sin\alpha}{\sin(\alpha_1 - \alpha)}; \quad y = \frac{p_1\cos\alpha - p\cos\alpha_1}{\sin(\alpha_1 - \alpha)}.$$

6)
$$x + y = a$$
$$x - y = b$$
$$3x + 4y = \frac{7a - b}{2}.$$

Antwort: $x = \frac{a+b}{2}$; $y = \frac{a-b}{2}$.

7) Es soll das Resultat der Elimination aus
$$ax + by + c = 0$$
$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$
angegeben werden.

Antwort:
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

8) Eliminire die Unbekannten aus

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= 0 \\ a_1x + b_1y + c_1z &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0. \end{aligned}$$

Antwort:
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

9) Welcher Bedingung müssen die gegebenen Grössen $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$ genügen, damit die Gleichungen

$$\begin{aligned} ax_1 + by_1 + c &= 0 \\ ax_2 + by_2 + c &= 0 \\ ax_3 + by_3 + c &= 0 \end{aligned}$$

möglich sind?

Antwort:
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

10)
$$\begin{aligned} x - 2y + 3z - u &= 5 \\ y - 2z + 3u - x &= 0 \\ z - 2u + 3x - y &= 0 \\ u - 2x + 3y - z &= 0. \end{aligned}$$

Antwort: $x = \frac{3}{7}, \quad y = \frac{4}{7}, \quad z = \frac{17}{7}, \quad u = \frac{11}{7}.$

11) Eliminire aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} l(x - x_1) + m(x - x_2) + n(x - x_3) &= 0 \\ l(y - y_1) + m(y - y_2) + n(y - y_3) &= 0 \\ l(z - z_1) + m(z - z_2) + n(z - z_3) &= 0 \end{aligned}$$

die drei Grössen l, m und n, und ordne das Resultat nach x, y, z.

Antwort:
$$\begin{vmatrix} x - x_1, & x - x_2, & x - x_3 \\ y - y_1, & y - y_2, & y - y_3 \\ z - z_1, & z - z_2, & z - z_3 \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$x\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

12) Löse das System auf:

$$\begin{aligned} a_{11}\,x + a_{21}\,y + a_{31}\,z + a_{41} &= 0 \\ a_{12}\,x + a_{22}\,y + a_{32}\,z + a_{42} &= 0 \\ a_{13}\,x + a_{23}\,y + a_{33}\,z + a_{43} &= 0. \end{aligned}$$

Antwort:

$$x = -\frac{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{23} & a_{33} & a_{43} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}}; \quad y = +\frac{\begin{vmatrix} a_{31} & a_{41} & a_{11} \\ a_{32} & a_{42} & a_{12} \\ a_{33} & a_{43} & a_{13} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}};$$

$$z = -\frac{\begin{vmatrix} a_{41} & a_{11} & a_{21} \\ a_{42} & a_{12} & a_{22} \\ a_{43} & a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}}.$$

13) Unter welcher Voraussetzung haben die Gleichungen

$$\begin{aligned} a_{11}\,x + a_{21}\,y + a_{31}\,z + a_{41} &= 0 \\ a_{12}\,x + a_{22}\,y + a_{32}\,z + a_{42} &= 0 \\ a_{13}\,x + a_{23}\,y + a_{33}\,z + a_{43} &= 0 \\ a_{14}\,x + a_{24}\,y + a_{34}\,z + a_{44} &= 0 \end{aligned}$$

Auflösungen?

Antwort:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

14) Eliminire aus den Gleichungen

$$\lambda\mu - \frac{1}{2}(\lambda + \mu)(\lambda_0 + \mu_0) + \lambda_0\mu_0 = 0$$

$$\lambda\mu - \frac{1}{2}(\lambda + \mu)(\lambda_1 + \mu_1) + \lambda_1\mu_1 = 0$$

$$\lambda\mu - \frac{1}{2}(\lambda + \mu)(\lambda_2 + \mu_2) + \lambda_2\mu_2 = 0$$

die Unbekannten $\lambda\mu$ und $\frac{1}{2}(\lambda + \mu)$.

Antwort:

$$\begin{vmatrix} 1; & -(\lambda_0 + \mu_0), & \lambda_0\mu_0 \\ 1; & -(\lambda_1 + \mu_1), & \lambda_1\mu_1 \\ 1; & -(\lambda_2 + \mu_2), & \lambda_2\mu_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Behandlung dieser Determinante siehe § 58 No. 27.

15) Löse auf

$$\begin{array}{ll} 1a_1 + a_0 s_1 \ldots\ldots\ldots\ldots & = 0 \\ 2a_2 + a_1 s_1 + a_0 s_2 \ldots\ldots\ldots & = 0 \\ 3a_3 + a_2 s_1 + a_1 s_2 + a_0 s_3 \ldots & = 0 \\ \vdots & \\ t a_t + a_{t-1} s_1 + a_{t-2} s_2 + \cdots + a_0 s_t = 0. & \end{array}$$

Antwort:

$$s_\lambda = \left(-\frac{1}{a_0}\right)^\lambda \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 2a_2 & a_1 & a_0 & 0 \ldots 0 \\ 3a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \lambda a_\lambda & a_{\lambda-1} & a_{\lambda-2} & a_0 \ldots a_1 \end{vmatrix}.$$

16) Betrachte in 15) $s_1 s_2 \ldots s_t$ als gegebene Grössen, $a_0 a_1 a_2 \ldots a_t$ als Unbekannte und löse auf.

Antwort:

$$\frac{a_\lambda}{a_0} = (-1)^\lambda \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \lambda} \begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & 0 & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & 3 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & (\lambda - 1) \\ s_\lambda & s_{\lambda-1} & \ldots & \ldots & s_1 \end{vmatrix}.$$

17) Es soll $C = c_0 x^4 + c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4$ durch $A = a_0 x^2 + a_1 x + a_2$ dividirt werden.

Antwort: Das Resultat hat die Form

$$B = b_2 x^2 + b_1 x + b_0 + \frac{b_{-1}}{x} + \frac{b_{-2}}{x^2} + \frac{b_{-3}}{x^3} + \ldots$$

Das Produkt $A \cdot B$ muss nun für alle Werthe von x gleich C sein. Dieses ist nur möglich, wenn die Coefficienten gleichhoher Potenzen von x in $A \cdot B$ und C einzeln verglichen gleich sind. Man findet hierdurch zur Bestimmung von $b_2, b_1, b_0, b_{-1}, b_{-2}, b_{-3}, b_{-4}$ etc. folgende Gleichungen:

$$\begin{array}{llllllll}
a_0 b_2 & \ldots & & & & & & = c_0 \\
a_1 b_2 & + a_0 b_1 \ldots & & & & & & = c_1 \\
a_2 b_2 & + a_1 b_1 & + a_0 b_0 \ldots & & & & & = c_2 \\
0 & + a_2 b_1 & + a_1 b_0 & + a_0 b_{-1} \ldots & & & & = c_3 \\
0 & + \ 0 & + a_2 b_0 & + a_1 b_{-1} & + a_0 b_{-2} \ldots & & & = c_4 \\
0 & + \ 0 & + \ 0 & + a_2 b_{-1} & + a_1 b_{-2} & + a_0 b_{-3} + & . & = 0 \\
0 & + \ 0 & + \ 0 & + \ 0 & + a_2 b_{-2} & + a_1 b_{-3} & + a_0 b_{-4} & = 0,
\end{array}$$

u. s. f.

Diese Gleichungen sind in Bezug auf die Unbekannten b vom ersten Grade, und können, da die Determinante nicht verschwindet, aufgelöst werden. Uebrigens bemerkt man leicht, dass zur Bestimmung von b_2 nur die erste Gleichung erforderlich ist; b_1 verlangt die ersten beiden, b_0 die ersten drei, b_{-1} die ersten vier, b_{-2} die ersten fünf Gleichungen u. s. f.

Für b_{-3} ist z. B.

$$\varDelta_1 = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & a_1 & a_0 \end{vmatrix} = (a_0)^6.$$

$$\delta = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_0 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & c_1 \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & c_2 \\ 0 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & c_3 \\ 0 & 0 & a_2 & a_1 & a_0 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & a_1 & 0 \end{vmatrix}$$

und

$$b_{-3} = \frac{\delta}{\Delta_1}.$$

18) Beweise mit Hülfe von Determinanten-Sätzen, dass zur Bestimmung von b_μ nur die Gleichung erforderlich, welche b_μ zuerst enthält, und die vorangehenden.

19) Löse das System

$$\frac{x^2}{a_1+\lambda_1}+\frac{y^2}{a_2+\lambda_1}+\frac{z^2}{a_3+\lambda_1}=1$$
$$\frac{x^2}{a_1+\lambda_2}+\frac{y^2}{a_2+\lambda_2}+\frac{z^2}{a_3+\lambda_2}=1$$
$$\frac{x^2}{a_1+\lambda_3}+\frac{y^2}{a_2+\lambda_3}+\frac{z^2}{a_3+\lambda_3}=1$$

auf.

Anmerkung. Benutze die Aufgabe 33 in § 53.

$$x = \pm\sqrt{\frac{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)(a_1+\lambda_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}};$$

ähnliche Werthe ergeben sich für y und z.

20) Eliminire aus den Gleichungen

$$(\cos\alpha - Q)\,x + a_1\cos\gamma\,y + a_1\cos\beta\,z = 0$$
$$b_1\cos\gamma\,x + (b_1 - Q)\,y + b_1\cos\alpha\,z = 0$$
$$c_1\cos\beta\,x + c_1\cos\alpha\,y + (c_1 - Q)\,z = 0$$

die Grössen x, y, z.

Antwort:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha - Q; & a_1\cos\gamma; & a_1\cos\beta \\ b_1\cos\gamma; & b_1 - Q; & b_1\cos\alpha \\ c_1\cos\beta; & c_1\cos\alpha; & c_1 - Q \end{vmatrix} = 0.$$

§ 94.

Lineare homogene Funktionen.

Den Ausdruck

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4x_4 \cdots + A_nx_n$$

nennt man eine lineare homogene Funktion. Darin kann man den Grössen $x_1, x_2 \ldots x_n$ jeden beliebigen Werth von $-\infty$ bis $+\infty$ geben. Deshalb heissen diese Grössen nicht

mehr Unbekannte, sondern Veränderliche. Jedem Werthsysteme der Veränderlichen entspricht ein Werth jenes Ausdruckes, jener Funktion. Bezeichnen wir demnach jenen Ausdruck abgekürzt mit ξ, so ist ξ selbst eine Veränderliche, deren Werth jedoch durch die x bestimmt wird. Man nennt daher die Funktion ξ auch eine **abhängig veränderliche.** Es sei z. B.

$$\xi = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 7x_5.$$

Gibt man $x_1, x_2 \ldots x_5$ den Werth 0, so ist auch $\xi = 0$. Ist $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{4}$, $x_4 = 3$, $x_5 = 0$, so ist $\xi = 2$ u. s. f. ξ ändert sich aber nicht willkürlich.

Es soll nunmehr ein System von n Funktionen mit je n Veränderlichen gegeben sein; nämlich

$$1)\qquad \begin{cases} \xi_1 = a_{11}\,x_1 + a_{21}\,x_2 + a_{31}\,x_3 + \cdots + a_{n1}\,x_n \\ \xi_2 = a_{12}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{32}\,x_3 + \cdots + a_{n2}\,x_n \\ \vdots \\ \xi_n = a_{1n}\,x_1 + a_{2n}\,x_2 + a_{3n}\,x_3 + \cdots + a_{nn}\,x_n. \end{cases}$$

Die Determinante dieses Systems von Funktionen

$$2)\qquad F = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \ldots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

nennt man die **Funktionaldeterminante.**

Wir wollen jetzt die Voraussetzung

$$3)\qquad F = 0$$

machen. Haben nun $\alpha_{11}\ \alpha_{21} \ldots \alpha_{nn}$ die frühere Bedeutung, und multipliciren wir die erste Funktion in 1) mit α_{11}, die zweite mit $\alpha_{12}, \ldots$ die $n$te mit α_{1n}, so wird

$$4)\qquad \alpha_{11}\,\xi_1 + \alpha_{12}\,\xi_2 + \alpha_{13}\,\xi_3 + \cdots + \alpha_{1n}\,\xi_n = 0.$$

Dieses Resultat geben wir durch den Satz wieder:

Verschwindet die Funktionaldeterminante eines Systems von linearen, homogenen Funktionen, so existirt zwischen diesen eine identische lineare und homogene Gleichung.

Die Richtigkeit der Umkehrung lässt sich leicht zeigen. Besteht nämlich die Gleichung

$$5) \qquad b_1 \xi_1 + b_2 \xi_2 + b_3 \xi_3 + \cdots + b_n \xi_n = 0$$

für jeden Werth der Veränderlichen $x_1, x_2 \ldots x_n$, so erhalten wir

$$b_1 (a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + \cdots + a_{n1} x_n) + b_2 (a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{n2} x_n) + \cdots + b_n (a_{1n} x_1 + \cdots + a_{nn} x_n) = 0.$$

Dies ist nur möglich, wenn jeder Summand verschwindet; man hat demnach das System von Gleichungen

$$\begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + \cdots + a_{n1} x_n = 0 \\ a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{n2} x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{1n} x_1 + a_{2n} x_2 + \cdots + a_{nn} x_n = 0, \end{array}$$

welches die Gleichung

$$F = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

nach sich zieht. Wir haben also den Satz gewonnen:

Besteht zwischen n linearen homogenen Funktionen eine identische Gleichung, so ist die Funktionaldeterminante gleich Null.

Bis jetzt haben wir stillschweigend vorausgesetzt, dass die Unterdeterminanten von F nicht verschwinden. Diese Hypothese lässt sich einschränken. Nehmen wir nämlich an, dass eine Unterdeterminante von Null verschieden ist, und ordnen wir die Funktionen und in ihnen die Veränderlichen so an, dass diese nicht verschwindende Unterdeterminante α_{11} ist, so bleibt die identische Gleichung 4) bestehen. Es lässt sich nun leicht zeigen, dass wenigstens noch eine der Unterdeterminanten $\alpha_{12}\, \alpha_{13} \ldots \alpha_{1n}$ von Null verschieden ist. Wären nämlich alle diese Unterdeterminanten gleich Null, so ginge 4) über in

$$\alpha_{11} \xi_1 = 0;$$

also müsste $\xi_1 = 0$ sein für jeden Werth von $x_1, x_2 \ldots x_n$, was nur möglich ist, wenn

$$a_{11} = a_{21} = \ldots a_{n1} = 0$$

ist, d. h. es würde die erste Gleichung überhaupt fehlen.

§ 95.

Fortsetzung.

Verschwinden in dem Systeme 1) des § 94 die Funktionaldeterminante und alle Unterdeterminanten $(n-1)$ter, $(n-2)$ter, $(n-3)$ter bis $(n-k+1)$ter Ordnung und verschwindet eine Unterdeterminante $(n-k)$ter Ordnung nicht, so kann man die Funktionen $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$ und in ihnen die Veränderlichen $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ so geordnet annehmen, dass diese nicht verschwindende Unterdeterminante aus der Funktionaldeterminante F dadurch hervorgeht, dass man die ersten k Horizontal- und Vertikalreihen fortlässt. Diese nicht verschwindende Unterdeterminante ist also:

$$6)\quad N = \begin{vmatrix} a_{k+1,k+1} & a_{k+2,k+1} & \ldots & a_{n,k+1} \\ a_{k+1,k+2} & a_{k+2,k+2} & \ldots & a_{n,k+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k+1,n} & a_{k+2,n} & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Umsäumen wir diese Determinante mit einer Horizontal- und Vertikalreihe, dass man z. B. erhält

$$7)\quad N_{1\lambda} = \begin{vmatrix} a_{1\lambda} & a_{k+1,\lambda} & a_{k+2,\lambda} & \ldots & a_{n\lambda} \\ a_{1,k+1} & a_{k+1,k+1} & a_{k+2,k+1} & \ldots & a_{n,k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{k+1,n} & a_{k+2,n} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

so ist nach der Voraussetzung

$$8)\quad N_{1\lambda} = 0,$$

da $N_{1\lambda}$ eine Unterdeterminante $(n-k+1)$ter Ordnung ist.

Die Unterdeterminanten von 7) bezeichnet man zweckmässig mit ν und gibt ihnen den Index des Elementes, dem sie adjungirt sind. So bildet man

$$8)\quad \nu_{1k},\ \nu_{1,k+1},\ \nu_{1,k+2} \ldots \nu_{1n},$$

wobei zu bemerken ist, dass $\nu_{1\lambda}$ mit N identisch ist und daher nicht verschwindet.

Wie wir $a_{1\lambda}\ldots$ als erste Horizontalreihe genommen haben, so hätten wir auch $a_{2\lambda}\ldots$, $a_{3\lambda}\ldots$, ... bis $a_{k\lambda}\ldots$ nehmen können. Die hierzu gebildeten Unterdeterminanten würden mit den entsprechenden ν identisch sein, während die Determinanten selbst verschwinden würden, da sie von der $(n-k+1)$ten Ordnung sind. Aus diesen Bemerkungen fliessen die Relationen

$$9)\quad \begin{cases} a_{1\lambda}\cdot\nu_{1\lambda}+a_{1,k+1}\cdot\nu_{1,k+1}+\cdots a_{1n}\cdot\nu_{1n}=0\\ a_{2\lambda}\cdot\nu_{1\lambda}+a_{2,k+1}\cdot\nu_{1,k+1}+\cdots a_{2n}\cdot\nu_{1n}=0\\ \vdots \\ a_{k\lambda}\cdot\nu_{1\lambda}+a_{k,k+1}\cdot\nu_{1,k+1}+\cdots a_{kn}\cdot\nu_{1n}=0. \end{cases}$$

Nach § 49, 3) bestehen ausserdem die Gleichungen

$$10)\quad \begin{cases} a_{k+1,\lambda}\,\nu_{1\lambda}+a_{k+1,k+1}\,\nu_{1,k+1}+\cdots+a_{k+1,n}\,\nu_{1n}=0\\ \vdots \\ a_{n\lambda}\,\nu_{1\lambda}+a_{n,k+1}\,\nu_{1,k+1}+\cdots+a_{nn}\,\nu_{1n}=0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen genügen zur Untersuchung des Funktionen-Systems 1) unter den gemachten Voraussetzungen. Wir scheiden die Funktionen $\xi_{k+1}, \xi_{k+2}\ldots\xi_n$ aus und fügen eine beliebige ξ_λ der übrig gebliebenen hinzu, so dass das System

$$11)\quad \begin{cases} \xi_\lambda=a_{1\lambda}\,x_1+a_{2\lambda}\,x_2+\ldots+a_{n\lambda}\,x_n\\ \xi_{k+1}=a_{1,k+1}\,x_1+a_{2,k+1}\,x_2+\ldots+a_{n,k+1}\,x_n\\ \xi_{k+2}=a_{1,k+2}\,x_1+a_{2,k+2}\,x_2+\ldots+a_{n,k+2}\,x_n\\ \vdots \\ \xi_n=a_{1n}\,x_1+a_{2n}\,x_2+\ldots+a_{nn}\,x_n \end{cases}$$

das ausgewählte ist. Wir multipliciren die erste dieser Funktionen mit $\nu_{1\lambda}$, die zweite mit $\nu_{1,k+1}$, die dritte mit $\nu_{1,k+2},\ldots$, die $n$te mit ν_{1n}, addiren dann und ordnen nach den Veränderlichen. Die Coefficienten dieser Veränderlichen werden die linken Seiten der Identitäten 9) und 10) und verschwinden daher. Hieraus folgt die identische Gleichung

$$12)\quad \nu_{1\lambda}\,\xi_\lambda+\nu_{1,k+1}\,\xi_{k+1}+\nu_{1,k+2}\,\xi_{k+2}+\ldots+\nu_{1n}\,\xi_n=0.$$

Aus dieser Identität gehen alle möglichen hervor, wenn man für λ der Reihe nach $1, 2, 3 \ldots k$ setzt.

Das Resultat dieser Untersuchung fassen wir in dem Satze zusammen:

Verschwinden die Funktionaldeterminante eines Systems linearer homogenener Gleichungen und alle Unterdeterminanten $(n-1)$ter, $(n-2)$ter ... bis $(n-k+1)$ter Ordnung, und verschwindet wenigstens eine Unterdeterminante $(n-k)$ter Ordnung nicht, so existiren zwischen den Funktionen k identische Gleichungen.

Wenn 12) eine Beziehung der gegebenen Funktionen enthalten soll, so müssen mindestens 2 der Grössen $\nu_{1\lambda}$, $\nu_{1,k+1} \ldots \nu_{1n}$ von Null geschieden sein: Es ist $\nu_{1\lambda} = N \gtrless 0$ nach der Annahme; sind also alle anderen Grössen gleich Null, so geht 12) über in

$$\nu_{1\lambda}\, \xi_\lambda = 0.$$

Demnach wäre $\xi_\lambda = 0$ für alle Werthe von $x_1, x_2 \ldots x_n$, was nur möglich ist, wenn

$$a_{1\lambda} = a_{2\lambda} = \ldots = a_{n\lambda} = 0$$

ist, wenn also die Funktion ξ_λ fehlt.

Ferner sind die k Identitäten 12) verschieden. Denn wäre die μte z. B. gleich der λten, so müsste $\xi_\lambda = \xi_\mu$ sein, was nicht sein soll, so dass wir jenem Satze noch hinzufügen können, dass jene k Identitäten unabhängig von einander sind.

Uebrigens wird man leicht bemerken, dass diese Untersuchung mit der von § 94 für $k = 1$ zusammenfällt, so dass man aus den Resultaten des bis jetzt behandelten Abschnittes die des vorigen § als speziellen Fall ableiten kann.

§ 96.

Fortsetzung.

Wir wollen noch einmal die Untersuchung von § 94 aufnehmen und dabei die Resultate der §§ 83 und 90 benutzen.

Geben wir in dem Systeme 1) § 94 den Veränderlichen $x_1, x_2 \ldots x_n$ zwar beliebige, aber doch eindeutige Werthe

$x'_1, x'_2 \ldots x'_n$, so gehen dadurch jene Funktionen $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$ in die constanten Grössen $\xi'_1, \xi'_2 \ldots \xi'_n$ über. Existirt nun eine identische Gleichung

$$13) \qquad A_1 \xi_1 + A_2 \xi_2 + \cdots + A_n \xi_n = C$$

zwischen den Funktionen $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$, so ist auch nothwendig

$$14) \qquad A_1 \xi'_1 + A_2 \xi'_2 + \cdots + A_n \xi'_n = C.$$

Wenn nun die Funktionaldeterminante F des Systemes 1) verschwindet, α_{11} aber nicht verschwindet, so geben wir der Veränderlichen x_1 den festen Werth x'_1, dann können wir den Funktionen $\xi_2, \xi_3 \ldots \xi_n$ willkürliche Werthe $w_2 w_3 w_4 \ldots w_n$ beilegen. Bilden wir nämlich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} w_2 - a_{12} x'_1 &= a_{22} x_2 + \cdots + a_{n2} a_n \\ w_3 - a_{13} x'_1 &= a_{23} x_2 + \cdots + a_{n3} x_n \\ &\vdots \\ w_n - a_{1n} x'_1 &= a_{2n} x_2 + \cdots + a_{nn} x_n, \end{aligned}$$

so kann man den Unbekannten $x_2, x_3 \ldots x_n$ solche Werthe geben, dass die Gleichungen befriedigt werden (§ 83), da ja die Determinante dieses Gleichungssystemes nach der Voraussetzung nicht verschwindet.

Sind nun die Funktionen $\xi_2, \xi_3 \ldots$ bis ξ_n durch die identische Gleichung

$$A_2 \xi_2 + A_3 \xi_3 + \cdots + A_n \xi_n = C$$

verbunden, so ist auch nach den obigen Bemerkungen

$$A_2 w_2 + A_3 w_3 + \cdots + A_n w_n = C$$

eine Identität. Da nach jenen Bemerkungen $w_2, w_3 \ldots w_n$ willkürliche Grössen sind, so sind die letzten Gleichungen nicht möglich. Denn gibt man z. B. $w_3, w_4 \ldots w_n$ bestimmte Werthe, so ist der Werth von w_2 durch jene Gleichung gegeben und nicht mehr willkürlich.

Also kann zwischen den Funktionen ξ_2 bis ξ_n überhaupt keine identische Gleichung existiren.

Wir haben nun früher § 94 gezeigt, dass unter den gemachten Voraussetzungen die Identität

$$15) \qquad \alpha_{11} \xi_1 + \alpha_{12} \xi_2 + \cdots + \alpha_{1n} \xi_n = 0$$

existirt. Gibt es noch eine zweite

16) $$B_1 \xi_1 + B_2 \xi_2 + B_3 \xi_3 + \cdots + B_n \xi_n = C$$

oder

$$\alpha_{11} \xi_1 + B_2 \frac{\alpha_{11}}{B_1} \xi_2 + B_3 \frac{\alpha_{11}}{B_1} \xi_3 + \cdots + B_n \frac{\alpha_{11}}{B_1} \xi_n = C \frac{\alpha_{11}}{B_1},$$

so erhält man durch Subtraktion

$$\left(B_2 \frac{\alpha_{11}}{B_1} - \alpha_{12}\right)\xi_2 + \left(B_3 \frac{\alpha_{11}}{B_1} - \alpha_{13}\right)\xi_3 + \cdots + \left(B_n \frac{\alpha_{11}}{B_1} - \alpha_{1n}\right)\xi_n = C \frac{\alpha_{11}}{B_1}.$$

Hier können zwei Fälle eintreten. Erstens können alle Coefficienten verschwinden, dann ist

$$\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}} = \frac{B_1}{B_2}, \quad \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{13}} = \frac{B_1}{B_3} \cdots \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{1n}} = \frac{B_1}{B_n}; \quad C = 0.$$

15) und 16) unterscheiden sich also nur durch einen gemeinschaftlichen Faktor; solche Gleichungen nennt man aber überhaupt nicht verschieden, da die eine aus der andern abgeleitet werden kann.

Zweitens sind einige Coefficienten von Null verschieden. Dann würde aber eine identische Funktion zwischen den Funktionen ξ_2, $\xi_3 \ldots \xi_n$ existiren, was nicht möglich ist.

Hiermit ist das Resultat des § 94 so erweitert:

Verschwindet die Funktionaldeterminante eines Systemes von n linearen homogenen Funktionen mit ebensovielen Unbekannten, und verschwindet wenigstens eine Unterdeterminante $(n-1)$ten Grades nicht, so existirt zwischen jenen Funktionen eine und nur eine identische Gleichung.

§ 97.

Fortsetzung.

Dem Resultate in § 95 können wir ebenfalls hinzufügen, dass nur k identische Gleichungen zwischen den n Funktionen existiren. Man zeigt zunächst, dass die Funktionen ξ_{k+1}, $\xi_{k+2} \ldots \xi_n$ durch keine identische Gleichung verbunden sind; dann dass eine weitere Identität zwischen ξ_1, $\xi_2 \ldots \xi_n$ eine Identität zwischen ξ_{k+1}, $\xi_{k+2} \ldots \xi_n$ nach sich zieht; dass also eine solche überhaupt nicht existiren kann.

Der Beweis ist in allen Theilen dem vorigen so analog, dass wir ihn dem Leser selbst überlassen können. Das Resultat wollen wir aber, wie folgt, zusammenfassen:

Verschwinden die Funktionaldeterminante eines Systems von n linearen homogenen Funktionen und alle Unterdeterminanten $(n-1)$ter, $(n-2)$ter ... $(n-k+1)$ter Ordnung, verschwindet aber wenigstens eine Unterdeterminante $(n-k)$ter Ordnung nicht, so gibt es k und nur k identische Gleichungen zwischen jenen n Funktionen.

§ 98.

Aufgaben und Beispiele.

1)
$$\begin{Bmatrix} \xi_1 = x_2 + 2x_3 \\ \xi_2 = - x_1 + 5x_3 \\ \xi_3 = -2x_1 - 5x_2 \end{Bmatrix}$$

ist gegeben. Es sollen die Funktionaldeterminante und die identische Gleichung abgeleitet werden.

Antwort:
$$F = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \\ -2 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad \text{(Weshalb?)}$$

$$\alpha_{11} = +25; \quad \alpha_{12} = -10; \quad \alpha_{13} = 5,$$

daher ist
$$25\xi_1 - 10\xi_2 + 5\xi_3 = 0,$$

oder
$$5\xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3 = 0$$

die identische Gleichung. Man überzeugt sich von der Richtigkeit derselben durch Einsetzen der Werthe von ξ_1, ξ_2 und ξ_3.

Weshalb existiren keine weiteren identischen Gleichungen?

2) Ebenso
$$\begin{Bmatrix} \xi_1 = 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \\ \xi_2 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 \\ \xi_3 = 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 \\ \xi_4 = 7x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 \end{Bmatrix}.$$

Antwort:
$$F = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 2 & 2 \\ 7 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\alpha_{1,1} = \alpha_{1,2} = \alpha_{1,3} = \alpha_{1,4} = 0; \quad \alpha_{2,1} = 0;$$
$$\alpha_{2,2} = -12; \quad \alpha_{2,3} = +36; \quad \alpha_{2,4} = -24.$$
$$\xi_2 - 3\xi_3 + 2\xi_4 = 0.$$

3) Weshalb darf man die Funktionen nicht der Reihe nach mit $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{1,3}$, $\alpha_{1,4}$ multipliciren?

4) Weshalb braucht man bei der praktischen Durchführung nicht die gegen Ende des § 94 angedeutete Anordnung vorzunehmen?

5) Wie ist der Satz des § 96, nach welchem zwischen den Funktionen $\xi_2, \xi_3, \xi_4, \ldots \xi_n$ keine identische Gleichung existirt, in unserm Falle auszusprechen?

6)
$$\left\{\begin{aligned}
\xi_1 &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 \\
\xi_2 &= 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 \\
\xi_3 &= 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 7x_5 \\
\xi_4 &= 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 7x_4 + 8x_5 \\
\xi_5 &= 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 9x_5
\end{aligned}\right\}.$$

Antwort: Alle Unterdeterminanten 4ten und 3ten Grades verschwinden, also hat man:

$$\begin{aligned}
&1) \quad \xi_1 - 4\xi_4 + 3\xi_5 = 0; \\
&2) \quad \xi_2 - 3\xi_4 + 2\xi_5 = 0; \\
&3) \quad \xi_3 - 2\xi_4 + \xi_5 = 0.
\end{aligned}$$

7) Beweise mit Hülfe der Sätze von den homogenen, linearen Funktionen folgenden Determinanten-Satz:

Verschwindet eine Determinante $n$ten Grades und verschwindet eine Unterdeterminante $(n-1)$ten Grades nicht, so verschwindet wenigstens noch eine andere Unterdeterminante desselben Grades nicht.

8) Der Satz 7) ist auf den Fall auszudehnen, in welchem die Determinante und alle Unterdeterminanten höherer Ordnung als der $(n-k)$ten verschwinden.

9) Sind m lineare homogene Funktionen mit n Veränderlichen gegeben und ist $m < n$, so kann man Determinanten dadurch bilden, dass man auf jede mögliche Art $n - m$ Vertikalreihen der Coefficienten auslässt. — Es gelten nun folgende Sätze:

9) 1. Verschwinden nicht alle so entstandenen Determinanten $m$ten Grades, so existiren zwischen den m Funktionen keine identischen Gleichungen.

9) 2. Verschwinden sämmtliche Determinanten $m$ten Grades und ebenso alle Unterdeterminanten $(m-1)$ten, $(m-2)$ten ... $(m-k+1)$ten Grades, verschwindet blos eine Unterdeterminante $(m-k)$ten Grades nicht, so existiren k und nur k identische Gleichungen.

10) Sind m Funktionen mit n Unbekannten gegeben, und ist $m > n$, so kann man durch Auswahl von je n Horizontalreihen der Coefficienten eine Reihe von Determinanten $n$ten Grades erzeugen. Es gelten die Sätze:

10) 1. Verschwindet eine Determinante $n$ten Grades nicht, so bestehen zwischen den m Funktionen $(m-n)$ und nur $(m-n)$ identische Gleichungen.

10) 2. Wenn alle Determinanten $n$ten, $(n-1)$ten, $(n-2)$ten ... $(n-k+1)$ten Grades verschwinden und nur eine Determinante $(n-k+1)$ten Grades nicht verschwindet, so existiren $(m-n+k)$ und nur $(m-n+k)$ identische Gleichungen.

§ 99.

Lineare Transformation linearer homogener Funktionen.

Es sei ein System

$$1)\qquad \left\{\begin{array}{l} \xi_1 = a_{11}\,x_1 + a_{21}\,x_2 + \ldots + a_{n1}\,x_n \\ \xi_2 = a_{12}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{n2}\,x_n \\ \vdots \\ \vdots \\ \xi_n = a_{1n}\,x_1 + a_{2n}\,x_2 + \ldots + a_{nn}\,x_n \end{array}\right\}$$

von n linearen homogenen Funktionen mit n Veränderlichen gegeben, dessen Funktionaldeterminante

$$F = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ist. Bildet man nun ein zweites System homogener linearer Funktionen

$$2)\quad \begin{cases} x_1 = b_{11}\, y_1 + b_{21}\, y_2 + \ldots + b_{n1}\, y_n \\ x_2 = b_{12}\, y_1 + b_{22}\, y_2 + \ldots + b_{n2}\, y_n \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ x_n = b_{1n}\, y_1 + b_{2n}\, y_2 + \ldots + b_{nn}\, y_n \end{cases}$$

mit der Determinante

$$M = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} & \ldots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \ldots & b_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

und transformirt man 1) dadurch, dass man die Werthe 2) in 1) einsetzt, so heisst M der Modul der Transformation.

Hierdurch geht das System 1) über in

$$3)\quad \begin{cases} \xi_1 = c_{11}\, y_1 + c_{21}\, y_2 + \ldots + c_{n1}\, y_n \\ \xi_2 = c_{12}\, y_1 + c_{22}\, y_2 + \ldots + c_{n2}\, y_n \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \xi_n = c_{1n}\, y_1 + c_{2n}\, y_2 + \ldots + c_{nn}\, y_n \end{cases}$$

mit der Determinante

$$4)\quad F_1 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} & \ldots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \ldots & c_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix},$$

wo zur Abkürzung

$$5)\quad \begin{aligned} a_{11}\, b_{11} + a_{21}\, b_{12} + \ldots + a_{n1}\, b_{1n} &= c_{11} \\ a_{11}\, b_{21} + a_{21}\, b_{21} + \ldots + a_{n1}\, b_{2n} &= c_{21} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{1n}\, b_{n1} + a_{2n}\, b_{n2} + \ldots + a_{nn}\, b_{nn} &= c_{nn} \end{aligned}$$

gesetzt ist. Man bemerkt leicht, dass

$$6)\quad F_1 = F \cdot M$$

ist. Diese Gleichung liefert den Satz:

Wenn ein System (1) von linearen homogenen Substitutionen (2) transformirt wird, so ist die Determinante des transformirten Systems gleich dem Produkte der Determinante des Originalsystems und dem Modul der Transformation.

Ist die Funktionaldeterminante $F = 0$, so ist auch

$$F_1 = 0.$$

Wenn demnach die Funktionaldeterminante des Originalsystems verschwindet, so verschwindet auch die Funktionaldeterminante des durch lineare homogene Substitutionen transformirten Systems.

Nach den Untersuchungen des vorigen Abschnittes können wir aus der letzten Bemerkung den Lehrsatz ziehen:

Besteht zwischen den Funktionen des Originalsystems (1) eine identische Gleichung, so besteht auch eine solche zwischen den Funktionen des transformirten Systems (3).

In der Gleichung (4) kommen nur die Coefficienten a und b vor, die übrigens keiner Einschränkung unterliegen. Fassen wir (6) unabhängig von den Systemen (1) und (3) auf, so enthält diese Formel das Multiplikationstheorem zweier Determinanten.

Wir haben demnach hier ein Beispiel für die Fruchtbarkeit der Betrachtungen von homogenen Funktionen bei Untersuchungen von Determinanten, während wir schon häufig Gelegenheit hatten, von den Determinanten bei den Untersuchungen homogener Funktionen nützliche Anwendung zu machen. Eine solche Wechselbeziehung liegt auch in dem Folgenden:

Transformirt man das System (1) durch die Substitutionen.

$$7)\qquad \left\{\begin{array}{l} x_1 = \alpha_{11} z_1 + \alpha_{12} z_2 + \alpha_{13} z_3 + \ldots + \alpha_{1n} z_n \\ x_2 = \alpha_{21} z_1 + \alpha_{22} z_2 + \alpha_{23} z_3 + \ldots + \alpha_{2n} z_n \\ \vdots \\ x_n = \alpha_{n1} z_1 + \alpha_{n2} z_2 + \alpha_{n3} z_3 + \ldots + \alpha_{nn} z_n \end{array}\right\},$$

mit dem Modul

$$8)\qquad M' = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix},$$

so hat die Funktionaldeterminante des transformirten Systems die Form

$$9)\qquad F'_1 = \begin{vmatrix} F, & 0, & 0 \dots 0 \\ 0, & F, & 0 \dots 0 \\ 0, & 0, & F \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 0, & 0, & 0 \dots F \end{vmatrix} = F^n.$$

Nach (6) ist

$$F'_1 = F \cdot M',$$

woraus die Gleichung

$$10)\qquad M' = F^{n-1}$$

folgt, welche die Beziehung des Originalsystems zum System der adjungirten Elemente enthält.

Uebrigens beachte man, dass durch die Substitutionen (7) das System (1) in

$$11)\qquad \begin{cases} \xi_1 = F z_1 \\ \xi_2 = F z_2 \\ \vdots \quad \vdots \\ \xi_n = F z_n \end{cases}$$

übergeht.

Vierter Abschnitt.

Ganze und homogene Funktionen des zweiten Grades.

§ 100.

Transformation durch lineare homogene Substitutionen.

Eine ganze und homogene Funktion vom zweiten Grade mit n Veränderlichen $x_1, x_2 \dots x_n$ hat die Form

$$\begin{aligned} 1)\ f(x_1, x_2 \dots x_n) = a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + 2 a_{13} x_1 x_3 + \dots + 2 a_{1n} x_1 x_n \\ + \ a_{22} x_2^2 + 2 a_{23} x_2 x_3 + \dots + 2 a_{2n} x_2 x_n \\ + \ a_{33} x_3^2 + \dots + 2 a_{3n} x_3 x_n \\ \vdots \\ + \dots + a_{nn} x_n^2, \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung

$$a_{\lambda\mu} = a_{\mu\lambda} \tag{2}$$

und

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= a_{11}\,x_1 + a_{21}\,x_2 + a_{31}\,x_3 + \dots + a_{n1}\,x_n \\
\xi_2 &= a_{12}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{32}\,x_3 + \dots + a_{n2}\,x_n \\
&\vdots \\
\xi_n &= a_{1n}\,x_1 + a_{2n}\,x_2 + a_{33}\,x_3 + \dots + a_{nn}\,x_n
\end{aligned} \tag{3}$$

kann man kürzer schreiben

$$f(x_1, x_2 \dots x_n) = \xi_1\,x_1 + \xi_2\,x_2 + \xi_3\,x_3 + \dots + \xi_n\,x_n. \tag{4}$$

$$F = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{5}$$

heisst die Determinante der Funktion f. Transformiren wir jetzt die Funktionen $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n$ durch die linearen homogenen Substitutionen

$$\begin{aligned}
x_1 &= b_{11}\,y_1 + b_{21}\,y_2 + b_{31}\,y_3 + \cdots + b_{n1}\,y_n \\
x_2 &= b_{12}\,y_1 + b_{22}\,y_2 + b_{32}\,y_3 + \cdots + b_{n2}\,y_n \\
&\vdots \\
x_n &= b_{1n}\,y_1 + b_{2n}\,y_2 + b_{3n}\,y_3 + \cdots + b_{nn}\,y_n,
\end{aligned} \tag{6}$$

so gehen nach § 99 die ξ über in

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= c_{11}\,y_1 + c_{21}\,y_2 + c_{31}\,y_3 + \cdots + c_{n1}\,y_n \\
\xi_2 &= c_{12}\,y_1 + c_{22}\,y_2 + c_{32}\,y_3 + \cdots + c_{n2}\,y_n \\
&\vdots \\
\xi_n &= c_{1n}\,y_1 + c_{2n}\,y_2 + c_{3n}\,y_3 + \cdots + c_{nn}\,y_n,
\end{aligned} \tag{7}$$

wo die Grössen c die in § 99 unter 4) und 5) angegebene Bedeutung haben.

Die beiden Seiten der Gleichungen (7) multipliciren wir mit entsprechenden Seiten der Gleichung (6) und addiren, wobei wir gleichzeitig die Glieder mit $y_1, y_2 \dots y_n$ für sich sammeln. Hierdurch erhalten wir

$$
\begin{aligned}
8) \qquad & \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \cdots + \xi_n x_n \\
& = (d_{11} y_1 + d_{12} y_2 + d_{13} y_3 + \cdots + d_{1n} y_n) y_1 \\
& + (d_{21} y_1 + d_{22} y_2 + d_{23} y_3 + \cdots + d_{2n} y_n) y_2 \\
& + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
& + (d_{n1} y_1 + d_{n2} y_2 + d_{n3} y_3 + \cdots + d_{nn} y_n) y_n ,
\end{aligned}
$$

wo zur Abkürzung

$$
\begin{aligned}
9) \qquad & b_{11} c_{11} + b_{12} c_{12} + \cdots + b_{1n} c_{1n} = d_{11} \\
& b_{11} c_{21} + b_{12} c_{22} + \cdots + b_{1n} c_{2n} = d_{12} \\
& \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\
& b_{n1} c_{n2} + b_{n2} c_{n2} + \cdots + b_{nn} c_{nn} = d_{nn}
\end{aligned}
$$

gesetzt ist. Wenn daher für

$$
10) \qquad \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & \dots & d_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & d_{n3} & \dots & d_{nn} \end{vmatrix}
$$

F_2 geschrieben wird, so besteht die Gleichung

$$F_2 = M \cdot F_1 .$$

Nach § 99 (6) ist

$$F_1 = F \cdot M.$$

Also

$$11) \qquad F_2 = M^2 \cdot F.$$

Diese Gleichung sprechen wir aus, wie folgt:

Transformirt man eine ganze homogene Funktion mit der Determinante F durch lineare homogene Substitutionen mit dem Modul M, so ist die Determinante der transformirten Funktion gleich dem Produkte aus dem Quadrate des Moduls und der Determinante der ursprünglichen Funktion.

§ 101.

Folgerungen.

1) Transformirt man eine homogene Funktion zweiten Grades durch eine homogene lineare Substitution, so erhält man wieder eine homogene Funktion zweiten Grades.

2) Verschwindet die Determinante einer homogenen Funktion zweiten Grades, so verschwindet auch die Determinante der transformirten Funktion.

3) Hat der Modul der linearen Substitution den Werth (+ 1) oder (— 1), so ändert sich die Determinante der Funktion nicht.

4) Man pflegt F die Invariante der Funktion f zu nennen, F_2 die Invariante der transformirten Funktion.

§ 102.

Adjungirte Funktionen.

Die homogene Funktion zweiten Grades mag durch die Gleichung 1) § 100 gegeben und an dieselbe die Bedingung geknüpft sein, dass die Invariante F (5) derselben von Null verschieden ist. Wir stellen die Aufgabe, die Funktion 1) durch das Substitutionssystem

$$1)\qquad \begin{aligned} X_1 &= a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 + \cdots + a_{n1}x_n \\ X_2 &= a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 + \cdots + a_{n2}x_n \\ &\vdots \\ X_n &= a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + a_{3n}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n \end{aligned}$$

zu transformiren. Da die Determinante dieses Systems von Null verschieden ist, so findet man nach § 83

$$2)\qquad \begin{aligned} Fx_1 &= \alpha_{11}X_1 + \alpha_{12}X_2 + \cdots + \alpha_{1n}X_n \\ Fx_2 &= \alpha_{21}X_1 + \alpha_{22}X_2 + \cdots + \alpha_{2n}X_n \\ &\vdots \\ Fx_n &= \alpha_{n1}X_1 + \alpha_{n2}X_2 + \cdots + \alpha_{nn}X_n, \end{aligned}$$

wo $\alpha_{\lambda\mu}$ dem Elemente $a_{\lambda\mu}$ adjungirt und wo nach § 74 $\alpha_{\lambda\mu} = \alpha_{\mu\lambda}$ ist. Multiplicirt man beide Seiten der Gleichungen resp. mit $X_1, X_2, X_3 \ldots X_n$ und addirt, so erhält man

$$3)\quad F\cdot f = \begin{aligned} &(\alpha_{11}X_1 + \alpha_{21}X_2 + \alpha_{31}X_3 + \cdots + \alpha_{n1}X_n)X_1 \\ &+ (\alpha_{12}X_1 + \alpha_{22}X_2 + \alpha_{32}X_3 + \cdots + \alpha_{n2}X_n)X_2 \\ &\vdots \\ &+ (\alpha_{1n}X_1 + \alpha_{2n}X_2 + \alpha_{3n}X_3 + \cdots + \alpha_{nn}X_n)X_n. \end{aligned}$$

Das Produkt $F \cdot f$ aus der Invariante F und der gegebenen Funktion f nennen wir die adjungirte Funktion von f.

Nach § 70 ergibt sich für die Invariante F_2 der adjungirten Funktion 3) sofort die Gleichung

$$F_2 = F^{n-1},$$

welche wir auf folgende Weise aussprechen:

Die Invariante der adjungirten homogenen Funktion zweiten Grades ist gleich der $(n-1)$ten Potenz der Invariante der ursprünglichen Funktion, wo n die Anzahl der Variabeln angibt.

§ 103.

Reduktion auf eine Summe von Quadraten.

Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, die ganze homogene Funktion zweiten Grades mit n Variabeln durch lineare Substitutionen in ein Aggregat von Quadraten

$$b_1 X_1^2 + b_2 X_2^2 + b_3 X_3^2 + \cdots + b_n X_n^2$$

überzuführen. Den Gang dieser Reduktion machen wir uns erst durch ein Beispiel klar, um dann den allgemeinen Fall zu betrachten.

Die Funktion

$$1) \qquad f = a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{13} x_1 x_3 + a_{22} x_2^2 + 2a_{23} x_2 x_3 + a_{33} a_3^2$$

bringen wir in die Form

$$2) \qquad f = a_{11} x_1^2 + 2(a_{12} x_2 + a_{13} x_3) x_1 + \Phi,$$

wo

$$3) \qquad \Phi = a_{22} x_2^2 + 2a_{23} x_2 x_3 + a_{33} x_3^2$$

ist. Durch die Substitution

$$5) \qquad X_1 = x_1 + \frac{a_{12} x_2 + a_{13} x_3}{a_{11}}$$

wird

$$6) \qquad f = a_{11} X_1^2 + \Phi_1,$$

wo

$$\Phi_1 = a_{22}\, x_2^2 + 2\, a_{23}\, x_2\, x_3 + a_{33}\, x_3^2 - \frac{(a_{12}\, x_2 + a_{1,3}\, x_3)^2}{a_{11}}$$

oder

$$7)\quad \Phi_1 = \frac{a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}}\, x_2^2 + 2\, \frac{a_{11}\, a_{23} - a_{12}\, a_{13}}{a_{11}}\, x_2\, x_3 + \frac{a_{11}\, a_{33} - a_{13}^2}{a_{11}}\, x_3^2$$

ist.

Durch die Bezeichnungen

$$8)\quad a_{22}^{(1)} = \frac{a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}}; \qquad a_{23}^{(1)} = \frac{a_{11}\, a_{23} - a_{12}\, a_{13}}{a_{11}};$$

$$a_{33}^{(1)} = \frac{a_{11}\, a_{33} - a_{13}^2}{a_{11}}$$

wird

$$9)\quad \Phi_1 = a_{22}^{(1)}\, x_2^2 + 2 a_{23}^{(1)}\, x_3 + a_{33}^{(1)}\, x_3^2 .$$

Hierin macht man

$$10)\quad X_2 = x_2 + \frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}\, x_3,$$

wodurch sich ergibt

$$\Phi_1 = a_{22}^{(1)} X_2^2 + \frac{a_{22}^{(1)}\, a_{33}^{(1)} - a_{23}^{(1)2}}{a_{22}^{(1)}}\, x_3^2 .$$

Durch die Abkürzung

$$11)\quad a_{33}^{(2)} = \frac{a_{22}^{(1)}\, a_{33}^{(1)} - a_{23}^{(1)2}}{a_{22}^{(1)}}$$

und die Substitution

$$12)\quad X_3 = x_3$$

wird schliesslich

$$13)\quad f = a_{11}\, X_1^2 + a_{22}^{(1)}\, X_2^2 + a_{33}^{(1)}\, X_3^2,$$

womit das Beispiel beendigt ist.

Es sei jetzt allgemein

$$1)\quad \begin{aligned} f = a_{11}\, x_1^2 &+ 2\, a_{12}\, x_1\, x_2 + 2\, a_{13}\, x_1\, x_3 + \ldots + 2\, a_{1n}\, x_1\, x_n \\ &+ \quad a_{22}\, x_2^2 \quad + 2\, a_{23}\, x_2\, x_3 + \ldots + 2\, a_{2n}\, x_2\, x_n \\ &\qquad \vdots \\ &\qquad + a_{nn}\, x_n^2 . \end{aligned}$$

Wir setzen

2) $f = a_{11}\, x_1^2 + 2\,(a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 + \ldots + a_{1n}\, x_n)\, x_1 + \Phi,$

wo

3) $$\Phi = a_{22}\, x_2^2 + 2\, a_{23}\, x_2\, x_3 + \ldots + a_{nn}\, x_n^2$$

eine von x_1 unabhängige ganze homogene Funktion zweiten Grades der Variabelen $x_2, x_3 \ldots x_n$ ist, und substituiren

4) $$X_1 = x_1 + \frac{a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 + \ldots + a_{1n}\, x_n}{a_{11}}.$$

Hierdurch wird

5) $$f = a_{11}\, X_1^2 + \Phi - \Psi,$$

wo zur Abkürzung

6) $$\Psi = \frac{(a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 + a_{14}\, x_4 + \ldots + a_{1n}\, x_n)^2}{a_{11}}$$

gesetzt ist, so dass

7) $$\begin{aligned} a_{11}\,\Psi = a_{12}^2\, x_2^2 &+ 2\, a_{12}\, a_{13}\, x_2\, x_3 + \ldots + 2\, a_{12}\, a_{1n}\, x_2\, x_n \\ &+ \quad a_{13}^2\, x_3^2 \qquad + \ldots + 2\, a_{13}\, a_{1n}\, x_3\, x_n \\ &\qquad\qquad\vdots \\ &\qquad\qquad + a_{1n}^2\, x_n^2 \end{aligned}$$

wird. Sammelt man daher in

8) $$\Phi - \Psi = \Phi_1$$

die mit denselben Variabeln behafteten Glieder und führt die abgekürzten Bezeichnungen

9) $$a_{22}^{(1)} = \frac{a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}}; \qquad a_{23}^{(1)} = \frac{a_{11}\, a_{23} - a_{12}\, a_{13}}{a_{11}} \ldots$$

$$a_{2n}^{(1)} = \frac{a_{11}\, a_{2n} - a_{12}\, a_{1n}}{a_{11}};$$

$$a_{33}^{(1)} = \frac{a_{11}\, a_{33} - a_{13}^2}{a_{11}}; \ldots a_{3n}^{(1)} = \frac{a_{11}\, a_{3n} - a_{13}\, a_{1n}}{a_{11}}$$

$$\vdots$$

$$a_{nn}^{(1)} = \frac{a_{11}\, a_{nn} - a_{1n}^2}{a_{11}}$$

ein, so erhält man

$$10)\quad \Phi_1 = a_{22}^{(1)'} x_2^2 + 2\, a_{23}^{(1)} x_2 x_3 + \ldots + 2\, a_{2n}^{(1)} x_2 x_n$$
$$+ \quad a_{33}^{(1)} x_3^2 \quad + \ldots + 2\, a_{3n}^{(1)} x_3 x_n$$
$$\vdots$$
$$+ \quad a_{nn}^{(1)} x_n^2$$

und

$$11)\quad f = a_{11} X_1^2 + \Phi_1 .$$

Φ_1 ist eine ganze homogene Funktion zweiten Grades der $(n - 1)$ Variabelen $x_2, x_3 \ldots x_n$ und kann daher nach der angegebenen Methode auf die Form

$$12)\quad \Phi_1 = a_{22}^{(1)} X_2^2 + \Phi_2$$

gebracht werden, wo

$$13)\quad \Phi = a_{33}^{(2)} x_3 + 2\, a_{34}^{(2)} x_3 x_4 + \ldots + 2\, a_{3n}^{(2)} x_3 x_n$$
$$+ \quad a_{44}^{(2)} x_4^2 \quad + \ldots + 2\, a_{4n}^{(2)} x_4 x_n$$
$$\vdots$$
$$+ \quad a_{nn}^{(2)} x_n^2 .$$

ist, worin die Coefficienten durch

$$14)\quad a_{33}^{(2)} = \frac{a_{22}^{(1)} a_{33}^{(1)} - a_{23}^{(1)2}}{a_{22}^{(1)}}; \quad a_{34}^{(2)} = \frac{a_{22}^{(1)} a_{34}^{(1)} - a_{23}^{(1)} a_{24}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}; \ldots .$$
$$a_{3n}^{(2)} = \frac{a_{22}^{(1)} a_{3n}^{(1)} - a_{23}^{(1)} a_{2n}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}; \ldots a_{nn}^{(2)} = \frac{a_{22}^{(1)} a_{nn}^{(1)} - a_{2n}^{(1)2}}{a_{22}^{(1)}}$$

gegeben sind.

Durch Fortsetzung dieser Operationen erhält man schliesslich

$$15)\quad f = a_{11} X_1^2 + a_{22}^{(1)} X_2^2 + a_{33}^{(2)} X_3^2 + a_{44}^{(3)} X_4^2 + \ldots + a_{nn}^{(n-1)} X_n^2 .$$

Bei der Untersuchung ist stillschweigend vorausgesetzt, dass keine der Grössen $a_{11}, a_{22}^{(1)} \ldots$ verschwindet. Würde eine dieser Grössen verschwinden, so würde man die Verwandlung in ein Aggregat von Quadraten trotzdem vornehmen können, da nur die Anzahl der neuen Variabeln geringer

werden würde, wovon man sich leicht überzeugt. Daher lässt sich die Gleichung 15) als Lehrsatz aussprechen, wie folgt:

Eine ganze homogene Funktion zweiten Grades von n Veränderlichen ist die Summe der Quadrate von ν linearen Funktionen, wo $\nu \overline{\overline{<}} n$ ist.

§ 104.

Folgerungen.

Nach unseren Untersuchungen über die linearen Funktionen hat die Invariante der homogenen Funktion zweiten Grades einen von Null verschiedenen endlichen Werth, wenn keine Bedingungsgleichung zwischen den Variabeln $x_1, x_2 \ldots x_n$ existirt, wenn dieselben also unabhängig von einander sind.

Ebenso ergibt sich aus den dort angestellten Betrachtungen, dass der Modul der Transformation von Null verschieden sein muss, wenn die Variabeln unabhängig von einander sein sollen.

Nun ist die Invariante der Funktion 15) in § 103

$$a_{11} \cdot \overset{(1)}{a}_{22} \cdot \overset{(2)}{a}_{33} \ldots \overset{(n-1)}{a}_{nn} .$$

Nach § 100 (11) ist die Invariante derselben Funktion

$$M^2 \cdot F,$$

wo M der Modul der Transformation und F die Invariante der ursprünglichen Funktion ist. Daher hat man

$$1) \qquad M^2 \cdot F = a_{11} \cdot \overset{(1)}{a}_{22} \cdot \overset{(2)}{a}_{33} \ldots \overset{(n-1)}{a}_{nn} .$$

Sind also M und F von Null verschieden, so kann keine der Grössen $a_{11}, \overset{(1)}{a}_{22}, \overset{(2)}{a}_{33} \ldots$ verschwinden. Hieraus folgt der Lehrsatz:

Eine ganze homogene Funktion von n Veränderlichen ist die Summe der Quadrate von n linearen Funktionen, wenn die n Veränderlichen unabhängig von einander sind.

§ 105.

Orthogonale Substitutionen.

Eine lineare Substitution heisst orthogonal, wenn die Bedingung

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$$

erfüllt ist, wo $x_1, x_2 \ldots x_n$ die ursprünglichen, $X_1, X_2 \ldots X_n$ die durch die Substitution eingeführten Veränderlichen sind.

Wir fügen noch die beschränkende Voraussetzung hinzu, dass die Substitution gleichzeitig die ganze homogene Funktion $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ der n Veränderlichen in eine Summe von Quadraten

$$s_1 X_1^2 + s_2 X_2^2 + \ldots + s_n X_n^2$$

überführen soll.

Die Untersuchung führen wir für den speciellen Fall $n = 3$ durch, der für Geometrie, Mechanik und Astronomie der wichtigste ist; bemerken aber ausdrücklich, dass die Methode unverändert auf n Variabele ausgedehnt werden kann.

Unsere Aufgabe können wir demnach definiren wie folgt:

Wenn

$$1) \qquad \begin{aligned} f(x_1 x_2 x_3) = a_{11} x_1^2 &+ 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{13} x_1 x_3 \\ &+ a_{22} x_2^2 + 2a_{23} x_2 x_3 \\ &\phantom{+ a_{22} x_2^2 x_1} + a_{33} x_3^2 \end{aligned}$$

ist, die Substitutionen

$$2) \qquad \begin{aligned} x_1 &= b_{11} X_1 + b_{21} X_2 + b_{31} X_3 \\ x_2 &= b_{12} X_1 + b_{22} X_2 + b_{32} X_3 \\ x_3 &= b_{13} X_1 + b_{23} X_2 + b_{33} X_3 \end{aligned}$$

zu bestimmen, durch welche die Gleichungen

$$3) \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$$

und

$$4) \qquad f(x_1, x_2, x_3) = s_1 X_1^2 + s_2 X_2^2 + s_3 X_3^2$$

zu identischen werden.

Quadrirt man die Seiten der Gleichungen 2), addirt und beachtet die Relation 3), so ergeben sich die Bedingungen

$$5)\quad \begin{aligned} b_{11}^2 + b_{12}^2 + b_{13}^2 &= 1; & b_{11}b_{21} + b_{12}b_{22} + b_{13}b_{23} &= 0\\ b_{21}^2 + b_{22}^2 + b_{23}^2 &= 1; & b_{11}b_{31} + b_{12}b_{32} + b_{13}b_{33} &= 0\\ b_{31}^2 + b_{32}^2 + b_{33}^2 &= 1; & b_{21}b_{31} + b_{22}b_{32} + b_{23}b_{33} &= 0. \end{aligned}$$

Wird der Modul der Substitution 2) mit M bezeichnet, so erhält man unter Beachtung des Multiplikationstheorems und Berücksichtigung des Systems von Gleichungen 5)

$$6)\qquad M^2 = 1.$$

Diese Eigenschaft der orthogonalen Substitutionen drücken wir als Lehrsatz aus:

Ist eine Substitution eine orthogonale, so ist das Quadrat des Moduls gleich der positiven Einheit.

Multiplicirt man die Seiten der ersten Gleichung im System 2) mit b_{11}, die der zweiten mit b_{12}, die der dritten mit b_{13}, addirt unter Anwendung der Relationen 5) und verfährt ebenso für X_2 und X_3, so folgt das System

$$7)\qquad \begin{aligned} X_1 &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3\\ X_2 &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3\\ X_3 &= b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3. \end{aligned}$$

Nach diesen aus der Identität 3) geflossenen Ergebnissen betrachten wir die Relationen 4) und 1). Wir bringen 1) auf die Form

$$\begin{aligned} f(x_1 x_2 x_3) = {} & (a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3)\,x_1\\ & + (a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3)\,x_2\\ & + (a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3)\,x_3, \end{aligned}$$

aus welcher mit Beachtung von 2) die Gleichung

$$8)\quad \begin{aligned} f(x_1x_2x_3) = {} & (a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3)(b_{11}X_1 + b_{21}X_2 + b_{31}X_3)\\ & + (a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3)(b_{12}X_1 + b_{22}X_2 + b_{32}X_3)\\ & + (a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3)(b_{13}X_1 + b_{23}X_2 + b_{33}X_3) \end{aligned}$$

abgeleitet wird. Ebenso macht man mit Hülfe von 7)

$$9)\quad \begin{aligned} s_1X_1^2 + s_2X_2^2 + s_3X_3^2 = {} & s_1(b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3)\,X_1\\ & + s_2(b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3)\,X_2\\ & + s_3(b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3)\,X_3. \end{aligned}$$

Nach 4) stimmen die rechten Seiten dieser Gleichungen überein. Die Coefficienten gleichnamiger Produkte können darin gleich gesetzt werden. Sammelt man nun die Glieder mit X_1x_1, X_1x_2, X_1x_3, so ergeben sich die Gleichungen

$$10)\qquad \begin{aligned} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+a_{13}b_{13}&=s_1\cdot b_{11}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{12}+a_{23}b_{13}&=s_1\cdot b_{12}\\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{12}+a_{33}b_{13}&=s_1\cdot b_{13}\end{aligned}$$

oder

$$11)\qquad \begin{aligned} (a_{11}-s_1)b_{11}+a_{12}b_{12}+a_{13}b_{13}&=0\\ a_{21}b_{11}+(a_{22}-s_1)b_{12}+a_{23}b_{13}&=0\\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{12}+(a_{33}-s_1)b_{13}&=0.\end{aligned}$$

Elimirt man aus diesen Gleichungen die Unbekannten b_{11}, b_{12}, b_{13}, so erhält man die Bedingung

$$12)\qquad \varDelta=\begin{vmatrix} a_{11}-s_1; & a_{12}; & a_{13}\\ a_{21}; & a_{22}-s_1; & a_{23}\\ a_{31}; & a_{32}; & a_{33}-s_1\end{vmatrix}=0,$$

welche s_1 erfüllt. Dieselbe Gleichung erhält man für s_2 und s_3, wenn man für s_2 die Glieder mit X_2x_1, X_2x_2, X_2x_3, für s_3 diejenigen mit X_3x_1, X_3x_2, X_3x_3 sammelt. Die Gleichung 12) ist in Bezug auf s eine kubische. Die gesuchten Coefficienten s_1, s_2, s_3 sind die Wurzeln dieser Gleichung.

Betrachtet man die Gleichung 12) als aufgelöst, so findet man durch Einsetzung der Werthe s_1, s_2, s_3 in die drei Systeme 11) die Verhältnisse der Substitutionscoefficienten b_{11}, b_{12}, b_{13}; b_{21}, b_{22}, b_{23} u. s. f. [Vgl. § 91.]

Durch Quadrirung und Anwendung des Systemes 5) ergeben sich hieraus b_{11}^2, b_{12}^2, b_{13}^2, b_{21}^2 etc., also auch die Substitutionscoefficienten selbst, so dass das behandelte Problem auf ein anderes, nämlich: die kubische Gleichung $\varDelta=0$ aufzulösen, zurückgeführt ist.

Alle Wurzeln dieser Gleichung sind reell, was bereits in § 58 Beispiel 25) gezeigt ist. Machen wir demnach noch die Voraussetzung, dass die Coefficienten a_{11}, $a_{12}\ldots$ der gegebenen Funktion reell sind, so schliesst man aus der angedeuteten Ableitung auf die Reellität der Substitutionscoefficienten.

Dieses wichtige Resultat sprechen wir als Lehrsatz aus: Wenn die Substitutionen 2) die Funktion 1) in 4) so überführen, dass gleichzeitig die Relation 3) besteht, so sind die Substitutionscoefficienten eindeutig bestimmte reelle Grössen.

§ 106.

Lehrsatz über die Coefficienten einer orthogonalen Substitution.

Transformirt man eine Funktion durch die linearen Substitutionen

1)
$$\begin{aligned} x_1 &= b_{11} X_1 + b_{21} X_2 + b_{31} X_3 \\ x_2 &= b_{12} X_1 + b_{22} X_2 + b_{32} X_3 \\ x_3 &= b_{13} X_1 + b_{23} X_2 + b_{33} X_3 \end{aligned}$$

und ist gleichzeitig

2)
$$\begin{aligned} X_1 &= b_{11} x_1 + b_{12} x_2 + b_{13} x_3 \\ X_2 &= b_{21} x_1 + b_{22} x_2 + b_{23} x_3 \\ X_3 &= b_{31} x_1 + b_{32} x_2 + b_{33} x_3, \end{aligned}$$

so ist die Substitution eine orthogonale.

In Folge der Gleichungen 1) hat man nämlich

3)
$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (b_{11} X_1 + b_{21} X_2 + b_{31} X_3)\, x_1 \\ + (b_{12} X_1 + b_{22} X_2 + b_{32} X_3)\, x_2 \\ + (b_{13} X_1 + b_{23} X_2 + b_{33} X_3)\, x_3. \end{aligned}$$

Aus 2) ergibt sich

4)
$$\begin{aligned} X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = (b_{11} x_1 + b_{12} x_2 + b_{13} x_3)\, X_1 \\ + (b_{21} x_1 + b_{22} x_2 + b_{23} x_3)\, X_2 \\ + (b_{31} x_1 + b_{32} x_2 + b_{33} x_3)\, X_3. \end{aligned}$$

Löst man in diesen beiden Gleichungen die Klammern auf und ordnet, so zeigt sich die Gleichheit der rechten Seite; also ist auch

5)
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2,$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist.

§ 107.

Bestimmung orthogonaler Substitutionen durch schief symmetrische Determinanten.

Das System der orthogonalen Substitution mit n Veränderlichen enthält n^2 Coefficienten b. Quadrirt und addirt man, so findet man unter Berücksichtigung der Identität

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$$

nur $\frac{n(n+1)}{2}$ Bedingungsgleichungen für die Coefficienten b. Man kann demnach $n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ Coefficienten willkürlich annehmen, oder auch sämmtliche b durch $\frac{n(n-1)}{2}$ willkürlich angenommene Grössen bestimmen. Wir wählen den letzteren Weg und führen $\frac{n(n-1)}{2}$ unabhängige Grössen c ein. Gleichzeitig nehmen wir der besseren Anschauung halber den Fall $n = 3$.

Wir setzen

1)
$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + c_{21} y_2 + c_{31} y_3 \\ x_2 &= c_{12} y_1 + y_2 + c_{32} y_3 \\ x_3 &= c_{13} y_1 + c_{23} y_2 + y_3 \end{aligned}$$

und

2)
$$\begin{aligned} X_1 &= y_1 + c_{12} y_2 + c_{13} y_3 \\ X_2 &= c_{21} y_1 + y_2 + c_{23} y_3 \\ X_3 &= c_{31} y_1 + c_{32} y_2 + y_3 , \end{aligned}$$

und es seien

3)
$$c_{21} = -c_{12}; \quad c_{31} = -c_{13}; \quad c_{32} = -c_{23}.$$

Ferner

4)
$$\mathfrak{C} = \begin{vmatrix} 1 & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & 1 & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & 1 \end{vmatrix}$$

mit den adjungirten Elementen $\gamma_{11}, \gamma_{21}, \gamma_{31}$ etc. Die Auflösungen von 1) und 2) sind

5)
$$\begin{aligned} \mathfrak{C} y_1 &= \gamma_{11} x_1 + \gamma_{12} x_2 + \gamma_{13} x_3 \\ \mathfrak{C} y_2 &= \gamma_{21} x_1 + \gamma_{22} x_2 + \gamma_{23} x_3 \\ \mathfrak{C} y_3 &= \gamma_{31} x_1 + \gamma_{32} x_2 + \gamma_{33} x_3 \end{aligned}$$

und

6)
$$\begin{aligned} \mathfrak{C} y_1 &= \gamma_{11} X_1 + \gamma_{21} X_2 + \gamma_{31} X_3 \\ \mathfrak{C} y_2 &= \gamma_{12} X_1 + \gamma_{22} X_2 + \gamma_{32} X_3 \\ \mathfrak{C} y_3 &= \gamma_{13} X_1 + \gamma_{23} X_2 + \gamma_{33} X_3 . \end{aligned}$$

Durch Addition leitet man aus 1) und 2) wegen der Bedingungen 2) die Relationen

7) $X_1 + x_1 = 2y_1; \quad X_2 + x_2 = 2y_2; \quad X_3 + x_3 = 2y_3$

ab. Durch Einsetzung des Werthsystems 7) geht 6) in

8) $$\begin{aligned} \mathfrak{C} x_1 &= (2\gamma_{11} - \mathfrak{C}) X_1 + 2\gamma_{21} X_2 + 2\gamma_{31} X_3 \\ \mathfrak{C} x_2 &= 2\gamma_{12} X_1 + (2\gamma_{22} - \mathfrak{C}) X_2 + 2\gamma_{32} X_3 \\ \mathfrak{C} x_3 &= 2\gamma_{13} X_1 + 2\gamma_{23} X_2 + 2\gamma_{33} X_3 \end{aligned}$$

über, 5) in

9) $$\begin{aligned} \mathfrak{C} X_1 &= (2\gamma_{11} - \mathfrak{C}) x_1 + 2\gamma_{12} x_2 + 2\gamma_{13} x_3 \\ \mathfrak{C} X_2 &= 2\gamma_{21} x_1 + (2\gamma_{22} - \mathfrak{C}) x_2 + 2\gamma_{23} x_3 \\ \mathfrak{C} X_3 &= 2\gamma_{31} x_1 + 2\gamma_{32} x_2 + (2\gamma_{33} - \mathfrak{C}) x_3. \end{aligned}$$

Macht man nun

10) $$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{2\gamma_{11} - \mathfrak{C}}{\mathfrak{C}}; \quad b_{21} = \frac{2\gamma_{21}}{\mathfrak{C}}; \quad b_{31} = \frac{2\gamma_{31}}{\mathfrak{C}}; \\ b_{12} &= \frac{2\gamma_{12}}{\mathfrak{C}}; \quad b_{22} = \frac{2\gamma_{22} - \mathfrak{C}}{\mathfrak{C}}; \quad b_{32} = \frac{2\gamma_{32}}{\mathfrak{C}}; \\ b_{13} &= \frac{2\gamma_{13}}{\mathfrak{C}}; \quad b_{23} = \frac{2\gamma_{23}}{\mathfrak{C}}; \quad b_{33} = \frac{2\gamma_{33} - \mathfrak{C}}{\mathfrak{C}}, \end{aligned}$$

so ergibt sich aus der Anwendung von § 106 auf 8) und 9), dass das System

11) $$\begin{aligned} x_1 &= b_{11} X_1 + b_{21} X_2 + b_{31} X_3 \\ x_2 &= b_{12} X_1 + b_{22} X_2 + b_{32} X_3 \\ x_3 &= b_{13} X_1 + b_{23} X_2 + b_{33} X_3 \end{aligned}$$

eine orthogonale Substitution ist.

In Folge von 3) wird

12) $$\mathfrak{C} = \begin{vmatrix} 1 & c_{21} & c_{31} \\ -c_{21} & 1 & c_{32} \\ -c_{31} & -c_{32} & 1 \end{vmatrix} = 1 + c_{21}^2 + c_{31}^2 + c_{32}^2;$$

$$\gamma_{11} = \begin{vmatrix} 1 & c_{32} \\ -c_{32} & 1 \end{vmatrix} = 1 + c_{32}^2; \quad \gamma_{21} = -\begin{vmatrix} -c_{21} & c_{32} \\ -c_{31} & 1 \end{vmatrix} = c_{21} - c_{31} c_{32};$$

$$\gamma_{31} = \begin{vmatrix} -c_{21} & 1 \\ -c_{31} & -c_{32} \end{vmatrix} = c_{31} + c_{21} c_{32}.$$

$$\gamma_{12} = -\begin{vmatrix} c_{21} & c_{31} \\ -c_{32} & 1 \end{vmatrix} = -c_{21} - c_{31} c_{32}; \quad \gamma_{22} = \begin{vmatrix} 1 & c_{31} \\ -c_{31} & 1 \end{vmatrix} = 1 + c_{31}^2;$$

$$\gamma_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & c_{21} \\ -c_{31} & -c_{32} \end{vmatrix} = c_{32} - c_{21} c_{31}.$$

$$\gamma_{13} = \begin{vmatrix} c_{21} & c_{31} \\ 1 & c_{32} \end{vmatrix} = -c_{31} + c_{21}c_{32}.$$

$$\gamma_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & c_{31} \\ -c_{21} & c_{32} \end{vmatrix} = -c_{32} - c_{21}c_{31};$$

$$\gamma_{33} = \begin{vmatrix} 1 & c_{21} \\ -c_{21} & 1 \end{vmatrix} = 1 + c_{21}^2.$$

Mit Hülfe dieser Grössen entspringt aus 10) für die Grössen $b_{11}, b_{21} \ldots$ folgendes Werthsystem:

$$13) \quad \frac{1+c_{32}^2-c_{21}^2-c_{31}^2}{\mathfrak{C}}; \quad 2\frac{c_{21}-c_{31}c_{32}}{\mathfrak{C}}; \quad 2\frac{c_{31}+c_{21}c_{32}}{\mathfrak{C}};$$

$$2\frac{-c_{21}-c_{31}c_{32}}{\mathfrak{C}}; \quad \frac{1+c_{31}^2-c_{21}^2-c_{32}^2}{\mathfrak{C}}; \quad 2\frac{c_{32}-c_{21}c_{31}}{\mathfrak{C}};$$

$$2\frac{-c_{31}+c_{21}c_{32}}{\mathfrak{C}}; \quad 2\frac{-c_{32}-c_{21}c_{31}}{\mathfrak{C}}; \quad \frac{1+c_{21}^2-c_{31}^2-c_{32}^2}{\mathfrak{C}};$$

so dass die Grössen b rational durch die Grössen c ausgedrückt sind.

§ 108.

Homogene Funktionen zweiten Grades mit verschwindender Determinante.

Nach der in § 105 angewandten Methode lässt sich die Funktion

$$1) \quad \begin{aligned} f = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots &+ 2a_{1n}x_1x_n \\ + \; a_{22}x_2^2 + \cdots &+ 2a_{2n}x_2x_n \\ &\;\vdots \\ &+ a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

durch die Substitutionen

$$2) \quad \begin{aligned} x_1 &= b_{11}X_1 + b_{21}X_2 + \cdots + b_{n1}X_n \\ x_2 &= b_{12}X_1 + b_{22}X_2 + \cdots + b_{n2}X_n \\ &\;\vdots \\ x_n &= b_{1n}X_1 + b_{2n}X_2 + \cdots + b_{nn}X_n \end{aligned}$$

in

$$2) \quad \varphi = s_1X_1^2 + s_2X_2^2 + \cdots + s_nX_n^2$$

überführen, wo die Coefficienten $s_1, s_2 \ldots s_n$ die Wurzeln der Gleichung

$$4)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} - s; & a_{12}; & \dots & a_{1n} \\ a_{21}; & a_{22} - s; & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}; & a_{n2}; & \dots & a_{nn} - s \end{vmatrix} = 0$$

sind.

Entwickelt man nach § 67 Δ nach steigenden Potenzen von s, so wird das von s freie Glied der Entwickelung die Invariante der gegebenen Funktion.

$$5)\qquad F = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ist nun

$$6)\qquad F = 0,$$

so ist eine Wurzel der Gleichung 4) $= 0$. Wir bezeichnen diese Wurzel mit s_n. Hiermit erhält 3) die Form

$$7)\qquad \varphi = s_1 X_1^2 + s_2 X_2^2 + \cdots + s_{n-1} X^2_{n-1},$$

in welcher nur noch $n - 1$ Veränderliche vorkommen. φ ist eine homogene Funktion zweiten Grades mit $n - 1$ Veränderlichen, daher ist es erlaubt das Resultat 7) als folgenden Lehrsatz auszudrücken:

Verschwindet die Invariante einer homogenen Funktion zweiten Grades, so lässt sich dieselbe durch homogene lineare Substitutionen in eine homogene Funktion zweiten Grades überführen, die eine Variabele weniger enthält.

In der Entwickelung von Δ ist nach § 67 der Coefficient von $- s$

$$\alpha_{11} + \alpha_{22} + \cdots + \alpha_{nn},$$

wo $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \dots \alpha_{nn}$ die den Elementen $a_{11}, a_{22}, \dots a_{nn}$ adjungirten Elemente sind. Sind diese in der Diagonale stehenden Unterdeteminanten gleich Null, so verschwindet demnach das Glied mit $- s$. Hieraus geht hervor, dass die Gleichung

$$\Delta = 0$$

zwei Wurzeln

$$s_n = 0 \quad \text{und} \quad s_{n-1} = 0$$

besitzt, wenn

$$F = 0; \quad \alpha_{11} = \alpha_{22} = \cdots \alpha_{nn} = 0$$

sind. Es ist dann

8) $$\varphi = s_1 X_1^2 + s_2 X_2^2 + \cdots s_{n-2} X^2_{n-2}.$$

Zieht man aus § 76, 6) die Folgerung, dass auch alle anderen Unterdeterminanten erster Ordnung verschwinden müssen, so lässt sich unser Ergebniss in besserer Uebereinstimmung mit den Untersuchungen über die linearen Funktionen aussprechen wie folgt:

Verschwinden die Invariante einer homogenen ganzen Funktion und alle Unterdeterminanten erster Ordnung, so können homogene lineare Substitutionen angegeben werden, wodurch die gegebene Funktion in eine andere transformirt wird, die zwei Variabele weniger enthält.

Wir überlassen es dem Leser, diese Untersuchung weiter fort zu führen, sowie den Beweis für die Umkehrungen zu liefern und die Substitutionen von der Beschränkung, dass sie orthogonale sein sollen, frei zu machen.

§ 109.

Das Trägheitsgesetz.

Nach unseren früheren Untersuchungen kann man auf unendliche viele Arten die homogene Funktion zweiten Grades in Aggregate von Quadraten verwandeln, und zwar so, dass die Coefficienten der Quadrate der Veränderlichen reelle Zahlen sind, wenn die Coefficienten der gegebenen Funktion und die linearen Substitutionen reell sind. Zu diesen Voraussetzungen fügen wir noch die hinzu, dass die Invariante der vorgelegten Funktion nicht verschwindet, oder, was nach den Resultaten in § 108 dasselbe ist, dass die n Veränderlichen $x_1, x_2 \ldots x_n$ unabhängig von einander sind. Unter diesen Annahmen mag die gegebene homogene Funktion zweiten Grades durch die Substitution

$$1) \qquad \begin{aligned} x_1 &= b_{11} X_1 + b_{21} X_2 + \cdots + b_{n1} X_n \\ x_2 &= b_{12} X_1 + b_{22} X_2 + \cdots + b_{n2} X_n \\ &\vdots \\ x_n &= b_{1n} X_1 + b_{2n} X_2 + \cdots + b_{nn} X_n \end{aligned}$$

in

$$2) \ \varphi = B_1 X_1^2 + B_2 X_2^2 + \cdots B_i X_i^2 - B_{i+1} X^2_{i+1} - \cdots - B_n X_n^2$$

und durch die Substitution

$$3) \qquad \begin{aligned} x_1 &= c_{11} Y_1 + c_{21} Y_2 + \cdots + c_{n1} Y_n \\ x_2 &= c_{12} Y_1 + c_{22} Y_2 + \cdots + c_{n2} Y_n \\ &\vdots \\ x_n &= c_{1n} Y_1 + c_{2n} Y_2 + \cdots + c_{nn} Y_n \end{aligned}$$

in

$$4) \ \varphi_1 = C_1 Y_1^2 + C_2 Y_2^2 + \cdots + C_k Y_k^2 - C_{k+1} Y^2_{k+1} - \cdots - C_n Y_n^2$$

übergehen. Die Coefficienten $B_1, B_2 \ldots, C_1, C_2 \ldots$ sollen absolute Zahlen sein und es mag

$$5) \qquad i < k$$

sein.

Da die ursprünglichen Veränderlichen unabhängig von einander sind, so kann man willkürliche Werthe für dieselben annehmen. Wir wählen dieselben so, dass

$$\begin{aligned} X_1 = X_2 = X_3 = \cdots = X_i = 0 \\ Y_{k+1} = Y_{k+2} = \cdots Y_n = 0 \end{aligned}$$

und dass wenigstens eine der Grössen X_i einen reellen gegebenen Werth erhält, was möglich ist, da

$$i + (n - k) \overline{\overline{<}} n - 1$$

ist, wegen $i < k$. Damit wird die rechte Seite von 3)

$$- B_{i+1} X^2_{i+1} - B_{i+2} X^2_{i+2} - \cdots - B_n X_n^2,$$

und die von 4)

$$C_1 Y_1^2 + C_2 Y_2^2 + \cdots + C_k Y_k^2.$$

Weil nun diese beiden Aggregate gleich sind und wenigstens **eine** der Grössen $X_{i+1}, X_{i+2} \ldots X_n$ nicht verschwindet, so muss eine negative Zahl gleich Null oder gleich einer positiven Zahl sein, was nicht möglich ist.

Daher kann auch i nicht kleiner als k sein.

Ebenso zeigt man, dass i nicht grösser als k sein kann, woraus sich ergibt, dass $i = k$ ist. Dieses wichtige Resultat drücken wir als Lehrsatz aus:

Verwandelt man eine homogene Funktion zweiten Grades mit reellen Coefficienten durch zwei verschiedene lineare homogene Substitutionen mit reellen Coefficienten in je ein Aggregat von Quadraten, so ist in beiden Aggregaten sowohl die Anzahl der positiven Glieder, als auch die der negativen gleich.

Dieser Satz ist als das Trägheitsgesetz bekannt.

§ 110.

Eintheilung der homogenen Funktionen.

I. Wir transformiren nun eine gegebene homogene Funktion zweiten Grades mit nur reellen Coefficienten a_{11}, $a_{12} \ldots a_{nn}$ durch eine orthogonale Substitution so, dass

$$1) \qquad f = s_1 X_1^2 + s_2 X_2^2 + \cdots s_n X_n^2$$

wird, wo die Coefficienten $s_1, s_2, \ldots s_n$ die Wurzeln der Gleichung

$$2) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} - s, & a_{12}; & \ldots a_{1n} \\ a_{21}; & a_{22} - s; & \ldots a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}; & a_{n2}; & \ldots a_{nn} - s \end{vmatrix} = 0$$

sind.

Haben diese Grössen $s_1, s_2 \ldots s_n$ nur positive Werthe, so wird für alle reellen Werthsysteme der n Veränderlichen f positiv, und f verschwindet nur für das Werthsystem

$$X_1 = X_2 = \cdots = X_n = 0;$$

man nennt daher f eine wesentlich positive Funktion. Sind dagegen alle Grössen $s_1, s_2 \ldots s_n$ negativ, so wird f negativ für alle Werthsysteme der Veränderlichen, nur nicht für das System $X_1 = X_2 = \cdots X_n = 0$, für welches f selbst verschwindet. In diesem Falle heisst f wesentlich negativ.

Wenn einige der Grössen s positiv, andere negativ sind, so ist für unendlich viele Werthsysteme f positiv, für un-

endlich viele andere negativ, für andere gleich Null. Man nennt dann f indifferent.

Wir drücken dieses Ergebniss als Lehrsatz aus:

Eine homogene Funktion zweiten Grades mit reellen Coefficienten $a_{11}, a_{12} \dots a_{nn}$ ist wesentlich positiv, wesentlich negativ oder indifferent, je nachdem die Wurzeln der Gleichung

$$\varDelta = 0$$

alle positiv, alle negativ, oder theils positiv theils negativ sind.

II. Man nennt die homogenen Funktionen mit reellen Coefficienten auch Formen. Nach dem Grade theilt man sie ein in quadratische, cubische, biquadratische etc., nach der Anzahl der Veränderlichen in binäre, ternäre, quaternäre etc. Formen.

§ 111.

Aufgaben.

1) Leite die Gleichung 12) in § 105 für n Veränderliche ab.

2) Bilde eine orthogonale Substitution zweiter Ordnung [2 Veränderliche].

Antwort:
$$x_1 = \frac{1 - c_{21}^2}{1 + c_{21}^2} X_1 + \frac{2 c_{21}}{1 + c_{21}^2} X_2,$$
$$x_2 = \frac{2 c_{21}}{1 + c_{21}^2} X_1 - \frac{1 - c_{21}^2}{1 + c_{21}^2} X_2.$$

3) Bilde eine orthogonale Substitution für $n = 4$.

4) Wie viel Coefficienten hat eine ganze homogene Funktion mit 17 Veränderlichen; wie viel eine solche mit 4 Veränderlichen?

Antwort:
$$\frac{17 \cdot 18}{2} = 153; \quad \frac{4 \cdot 5}{2} = 10.$$

5) Transformire die Funktion

$$x_1^2 + 2x_1 x_2 + 3x_2^2 \quad \text{in} \quad s_1 X_1^2 + s_2 X_2^2,$$

so dass

$$x_1^2 + x_2^2 = X_1^2 + X_2^2$$

bleibt.

6) Transformire ebenso

$$x_1^2 + 2x_1 x_2 - 3x_2^2.$$

7) Transformire ebenso

$$5x_1^2 + 6x_1 x_2 + 8x_1 x_3 + 3x_2^2 + 2x_2 x_3 + x_3^2.$$

8) Reducire nach § 103

$$a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2$$

auf eine Summe von Quadraten.

9) Nimm dieselbe Reduktion mit der Funktion

$$9x_1^2 + 7x_1 x_2 + 13x_1 x_3 + 4x_2^2 + 12x_2 x_3 + 16x_3^2$$

vor.

10) Welche Invariante gehört zur Funktion

$$\begin{array}{rrrr} 17x_1^2 + & 20x_1 x_2 + & 10x_1 x_3 + & 6x_1 x_4 \\ + & 5x_2^2 & + 14x_2 x_3 + & 18x_2 x_4 \\ & + & 3x_3^2 \quad + & 6x_3 x_4 \\ & & + & 2x_4^2 ? \end{array}$$

11) Wie heisst die dieser Funktion adjungirte Funktion?

12) Welchen Werth hat die Invariante dieser adjungirten Funktion?

13) Beweise die in § 108 enthaltenen Resultate nach der bei der Untersuchung über lineare Funktionen angewandten Methode.

14) Stelle die Bedingungen fest, unter welchen die binäre quadratische Form $a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2$ wesentlich positiv, wesentlich negativ oder indifferent ist.

Antwort: $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{11} \end{vmatrix} \gtreqless 0.$$

15) Stelle mit Hülfe der Transformationsmethode in § 103 die Bedingungen fest, unter denen die ternäre quadratische Form

$$a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{13} x_1 x_3 + a_{22} x_2^2 + 2a_{23} x_2 x_3 + a_{33} x_3^2$$

wesentlich positiv, wesentlich negativ oder indifferent ist.

16) Wende dasselbe Verfahren auf die binären quadratischen, Formen an.

17) Transformire nach § 103 die Funktion

$$x_1^2 + 4x_1x_2 + 10x_1x_3 + 8x_1x_4 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 12x_2x_4 + x_3^2 + 18x_3x_4 + x_4^2$$

in ein Aggregat von Quadraten, und stelle die aus denselben linearen Substitutionen entspringende adjungirte Funktion fest.

18) In der Aufgabe 15) wurden diejenigen Substitutionen gefunden, durch welche die ternäre quadratische Form in ein Aggregat von Quadraten verwandelt wird. Beweise mit Hülfe dieser Resultate, dass die adjungirte Funktion sich auf ein vollständiges Quadrat reducirt, wenn

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

ist.

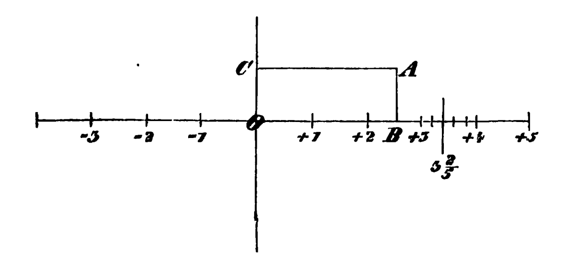
Fünfter Abschnitt.

Allgemeine Sätze über ganze algebraische Funktionen $n$ten Grades mit einer Veränderlichen.

§ 112.

Geometrische Abbildung der Zahlen.

Nimmt man in einer Ebene eine Gerade beliebig an und in derselben einen Punkt O, so lassen sich von O aus auf



dieser Geraden nach rechts und links unendlich viele gleiche Stücke abtheilen. Schreibt man an die Theilpunkte von O

aus nach einer Richtung, z. B. nach rechts alle positiven ganzen Zahlen, nach der entgegengesetzten Richtung alle negativen ganzen Zahlen, so sind hiermit alle reellen ganzen Zahlen dargestellt. Um auf dieselbe Weise einen Bruch oder eine gemischte Zahl, z. B. $3\frac{2}{5}$ abzubilden, theilt man die Strecke von 3 bis 4 in 5 gleiche Theile, und schreibt an den zweiten der so erhaltenen Theilpunkte die Zahl $3\frac{2}{5}$. In gleicher Weise lassen sich alle Brüche und Quotienten durch Punkte jener Linie abbilden.

Die reellen irrationalen Zahlen lassen sich mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit durch reelle rationale Zahlen ausdrücken. Die Bilder der irrationalen reellen Zahlen müssen also Punkte derselben Geraden sein.

Man sieht leicht ein, dass umgekehrt jeder Punkt der Geraden eine reelle Zahl darstellt.

Nun errichten wir im Punkte O ein Loth OY, schneiden nach beiden Seiten Stücke ab, welche gleich den Theilen auf OX sind, schreiben an den ersten Theilpunkt nach $+Y$ hin i, an den zweiten $2i$ u. s. f. Nach $-Y$ hin schreiben wir an die auf einander folgenden Theilpunkte $-i$, $-2i$, $-3i$ u. s. f. Theilen wir jetzt noch jedes Stück der Geraden YY in gleiche Theile und verfahren mit den Theilpunkten wie früher, so erhalten wir Abbildungen neuer Zahlen, die wir imaginäre nennen.

Von einem beliebigen Punkte A der Ebene fällen wir die Lothe AB und AC auf OX und OY. Der Fusspunkt B mag das Zeichen α, C das Zeichen βi tragen. Da der Punkt A durch Angabe von α und βi vollständig bestimmt ist, so können wir die durch A dargestellte Zahl mit $(\alpha, \beta i)$ bezeichnen. Diese Zahlen sollen c o m p l e x e genannt werden.

Um mit diesen Zahlen rechnen zu können, müssen wir den Begriff der Addition und Multiplikation verallgemeinern. Zwei Zahlen $(\alpha, \beta i)$ und $(\alpha_1, \beta_1 i)$ addiren heisst die Zahl $(\alpha + \alpha_1, [\beta + \beta_1]\, i)$ bilden.

Nun ist

$$(\alpha, 0i) = \alpha$$
$$(0, \beta i) = \beta i;$$

daher auch

$$(\alpha, 0i) + 0, \beta i) = \alpha + \beta i.$$

Nach der Erklärung der Addition ist

$$(\alpha, 0i) + (0, \beta i) = (\alpha, \beta i).$$

Also muss man

$$(\alpha, \beta i) = \alpha + \beta i$$

setzen, wodurch unsere Erklärung der Addition die Form gewinnt

$$[\alpha + \beta i] + [\alpha_1 + \beta_1 i] = [\alpha + \alpha_1] + [\beta + \beta_1] i.$$

Für $\beta = \beta_1 = 0$ geht diese Identität über in

$$[\alpha] + [\alpha_1] = \alpha + \alpha_1.$$

Die in den Elementen übliche Addition ist demnach ein besonderer Fall der hier gegebenen.

Die Multiplikation wollen wir durch die Gleichung definiren

$$(\alpha + \beta i)(\alpha_1 + \beta_1 i) = [\alpha\alpha_1 - \beta\beta_1] + [\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta] i.$$

Setzen wir

$$\alpha = \alpha_1 = 0; \quad \beta = \beta_1 = 1,$$

so erhalten wir

$$i \cdot i = -1.$$

Folglich ist

$$i = \sqrt{-1}.$$

Wir haben die Addition und Multiplikation verallgemeinert, jedoch so, dass sie die früheren Fälle in sich schliessen, und so, dass wir durch diese Operationen wieder auf Zahlen derselben Form kommen.

§ 113.

Hülfssätze.

1) Wenn

$$\alpha + \beta i = 0$$

ist, so ist

$$\alpha = -\beta i$$

und

$$\alpha^2 = -\beta^2;$$

demnach müsste eine positive Grösse einer negativen gleich sein, was nicht anders möglich ist, als wenn

$$\alpha = 0$$

und

$$\beta = 0$$

sind.

2) Ist

$$\alpha + \beta i = \alpha_1 + \beta_1 i,$$

so hat man

$$(\alpha - \alpha_1) + (\beta - \beta_1) i = 0.$$

Also muss auch

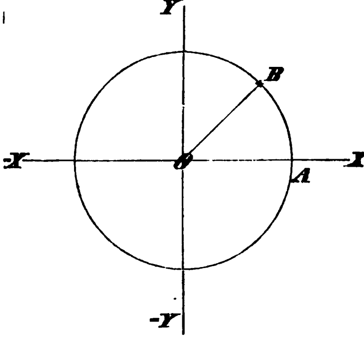
$$\alpha = \alpha_1 \text{ und } \beta = \beta_1 \text{ sein.}$$

Anmerkung. Aehnliche Sätze gelten auch für rationale und irrationale Zahlen.

§ 114.

Trigonometrische Hülfssätze.

Beschreiben wir um O mit dem Radius 1 einen Kreis, so hat dieser Kreis die Maasszahl 2π, wo $\pi = 3{,}141592653$ ist.



Durch das bekannte Winkelmaass Grad gemessen, erhält man für den Kreis die Maasszahl 360.

Nennen wir nun die Maasszahl eines beliebigen Kreisbogens AB, gemessen durch den Radius, φ, und gemessen durch Grad, w, so ergibt sich die Relation

$$w : 360 = \varphi : 2\pi,$$

woraus die Gleichungen

$$w = \frac{180}{\pi} \varphi$$

und

$$\varphi = \frac{\pi}{180} w.$$

folgen, wodurch das Bogenmaass auf Winkelmaass und das Winkelmaass auf Bogenmaass reducirt wird.

Die reellen Zahlen kann man nach diesen Betrachtungen als Maasszahlen von Bogen auffassen, für welche der Radius als Maass angenommen ist. Ist die gegebene reelle Zahl grösser als 2π, so lässt sie sich ausdrücken durch $2s\pi + \psi$, wo nunmehr ψ zwischen 0 und 2π liegt.

Aehnliches gilt auch für die negativen reellen Zahlen, wenn man nur, wie in der elementaren Trigonometrie, eine Drehung nach der entgegengesetzten Seite zulässt.

Man überzeugt sich leicht von der Richtigkeit der Identitäten

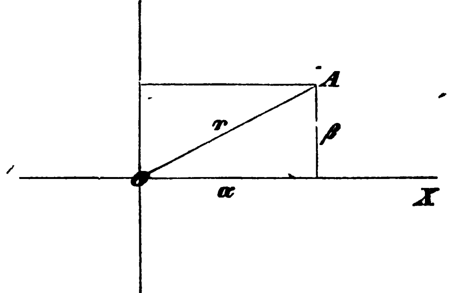
$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$$
$$\sin(\varphi + \varphi_1) = \sin\varphi \cos\varphi_1 + \cos\varphi \sin\varphi_1$$
$$\sin(\varphi - \varphi_1) = \sin\varphi \cos\varphi_1 - \cos\varphi \sin\varphi_1$$
$$\cos(\varphi + \varphi_1) = \cos\varphi \cos\varphi_1 - \sin\varphi \sin\varphi_1$$
$$\cos(\varphi - \varphi_1) = \cos\varphi \cos\varphi_1 + \sin\varphi \sin\varphi_1$$
$$\sin(2\pi \pm \varphi) = \pm \sin\varphi$$
$$\cos(2\pi \pm \varphi) = \cos\varphi.$$

Hierbei haben wir den Begriff der trigonometrischen Funktionen nicht geändert. Wie derselbe so verallgemeinert werden kann, dass er auf complexe Zahlen Anwendung findet, wird in der Analysis (Reihenlehre) gelehrt.

§ 115.

Darstellung der complexen Zahlen durch trigonometrische Funktionen.

Die Zahl $\alpha + \beta i$ sei durch den Punkt A abgebildet. Wir ziehen OA, nennen die Maasszahl dieser Strecke r und die Maasszahl des zu AOX gehörigen Bogens des Einheitskreises φ. Dann ist



$$r \cos\varphi = \alpha$$
$$r \sin\varphi = \beta$$

und

$$r^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

Diese Grösse $\alpha^2 + \beta^2$ heisst die Norm der Zahl $\alpha + \beta i$. Setzen wir ferner für r die positive Quadratwurzel aus $\alpha^2 + \beta^2$, so haben wir zur Bestimmung von φ die beiden Gleichungen

$$\cos\varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

$$\sin\varphi = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

$$r = +\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

heisst der Modul der Zahl

$$\alpha + \beta i.$$

Aus dieser Untersuchung ergibt sich, dass jede Zahl $\alpha + \beta i$ ausgedrückt werden kann durch

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

wo r und φ eindeutig bestimmt sind, wenn wir noch voraussetzen

$$0 < \varphi < 2\pi,$$

oder auch

$$-\pi < \varphi < \pi.$$

§ 116.

Einige Operationen mit complexen Zahlen.

1) Multiplikation.

Es ist

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \times r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) =$$
$$rr_1[\cos\varphi\cos\varphi_1 - \sin\varphi\sin\varphi_1 + i(\sin\varphi\cos\varphi_1 + \cos\varphi\sin\varphi_1)] =$$
$$r r_1[\cos(\varphi+\varphi_1) + i\sin(\varphi+\varphi_1)].$$

Ebenso erhält man

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\, r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\, r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$r r_1 r_2[\cos(\varphi+\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi+\varphi_1+\varphi_2)].$$

2) Potenzirung.

Setzt man die complexen Zahlen gleich, so folgt

$$r^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

3) Division.

a) $$\frac{1}{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \frac{\cos\varphi - i\sin\varphi}{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi - i\sin\varphi} =$$

$$\frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi) = r^{-1}(\cos - \varphi + i\sin - \varphi)$$

b) $$\frac{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)} = \frac{r}{r_1}[\cos(\varphi - \varphi_1) + i\sin(\varphi - \varphi_1)],$$

c) $$\frac{r^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n}{r_1^{n_1}(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)^{n_1}} = \frac{r^n}{r_1^{n_1}}[\cos(n\varphi - n_2\varphi_1) + i\sin(n\varphi - n_1\varphi_1)].$$

§ 117.

Auflösung der Gleichung $x^n - 1 = 0$.

Gibt es eine Zahl, welche für x eingesetzt die Gleichung $x^n - 1 = 0$ oder $x^n = 1$ befriedigt, so hat die Zahl die Form $r^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Daher muss

$$r^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = 1$$

sein. Demnach hat man

$$r^n\cos n\varphi + r^n\sin n\varphi \,.\, i = 1.$$

Diese Gleichung zerfällt in die beiden anderen

$$r^n\cos n\varphi = 1$$
$$r^n\sin n\varphi = 0.$$

Durch Quadriren und Addiren erhält man

$$r^{2n} = 1.$$

Da r nach unseren früheren Betrachtungen reell und positiv sein muss, so hat r den Werth 1, so dass die beiden aufgestellten Gleichungen übergehen in

$$\cos n\varphi = +1, \quad \sin n\varphi = 0.$$

Diese Gleichungen werden befriedigt und nur befriedigt durch solche Werthe von φ, für welche $n\varphi = 2\nu\pi$ ist, wo ν alle positiven und negativen ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft.

Hiermit wird $\varphi = \frac{2\nu\pi}{n}$ und eine beliebige Wurzel der gegebenen Gleichung hat den Werth und die Form

$$\cos\frac{2\nu\pi}{n} + i\sin\frac{2\nu\pi}{n}.$$

Um die Frage zu entscheiden, ob alle diese Werthe von einander verschieden sind oder nicht, gruppiren wir die Werthe von φ nach einem an sich klaren Schema:

$$1)\quad \left|\begin{array}{ccccc}
\vdots & \vdots & & & \vdots \\
\frac{2n}{n}2\pi; & \frac{2n+1}{n}2\pi; & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \frac{3n-1}{n}2\pi \\
\frac{n}{n}2\pi; & \frac{n+1}{n}2\pi; & \frac{n+2}{n}2\pi; & \frac{n+3}{n}2\pi \ldots & \frac{2n+1}{n}2\pi \\
0; & \frac{2\pi}{n} & \frac{2}{n}2\pi; & \frac{3}{n}2\pi \ldots & \frac{n-1}{n}2\pi \\
-\frac{n}{n}2\pi; & -\frac{n-1}{n}2\pi; & -\frac{2n-2}{n}2\pi; & -\frac{n-3}{n}2\pi \ldots & -\frac{1}{n}2\pi \\
-\frac{2n}{n}2\pi; & -\frac{2n-1}{n}2\pi; & -\frac{2n-2}{n}2\pi; & -\frac{2n-3}{n}2\pi \ldots & -\frac{n+1}{n}2\pi \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}\right|.$$

Je zwei Bogen derselben Vertikalreihe unterscheiden sich um 2π oder ein vielfaches von 2π. Die Cosinus der Bogen einer und derselben Vertikalreihe haben daher denselben Werth.

Die Bogen der mit 0 beginnenden Horizontalreihe liegen zwischen 0 und 2π und haben verschiedene Cosinus resp. Sinus. Man erhält daher alle Wurzeln der vorgelegten Gleichung, wenn man für φ nach einander die n Werthe

$$0, \ \frac{2\pi}{n}, \ \frac{2\cdot 2\pi}{n}, \ \frac{3\cdot 2n}{n} \ldots \frac{(n-1)2\cdot\pi}{n}$$

setzt. Die n Wurzeln der positiven Einheit ergeben sich aus

$$\cos\frac{2\nu\pi}{n} + i\sin\frac{2\nu\pi}{n}$$

dadurch, dass man für ν die Zahlen $0, 1, 2 \ldots (n-1)$ schreibt.

Diese n Werthe lassen sich zu je zweien gruppiren, was man sofort übersieht, wenn man die Fälle des geraden und ungeraden n getrennt behandelt.

I. n ungerade

$$0; \qquad \frac{1}{n}2\pi; \qquad \frac{2}{n}2\pi \ \ldots \ \frac{\frac{n-1}{2}}{n}2\pi$$

$$2\pi - \frac{1}{n}2\pi; \ 2\pi - \frac{2}{n}2\pi \ \ldots \ \frac{\frac{n+1}{2}}{n}2\pi$$

Wurzeln:

$$1; \quad \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}, \quad \cos\frac{2\cdot 2\pi}{n} + i\sin\frac{2\cdot 2\pi}{n}; \ \ldots$$

$$\cos\frac{\frac{n-1}{2}}{n}2\pi + i\sin\frac{\frac{n-1}{2}}{n}2\pi;$$

$$\cos\frac{2\pi}{n} - i\sin\frac{2\pi}{n}; \quad \cos\frac{2\cdot 2\pi}{n} - i\sin\frac{2\cdot 2\pi}{n}; \ \ldots$$

$$\cos\frac{\frac{n-1}{2}}{n}2\pi - i\sin\frac{\frac{n-1}{2}}{n}2\pi.$$

II. n gerade

$$0; \quad \frac{1}{n}2\pi; \ \ldots \quad \frac{\frac{n}{2}-1}{n}2\pi; \quad \frac{\frac{n}{2}}{n}2\pi$$

$$2\pi - \frac{1}{n}2\pi; \ \ldots \quad 2\pi - \frac{\frac{n}{2}-1}{n}2\pi;$$

Wurzeln:

$$1; \quad \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}; \ \ldots \ \cos\frac{\frac{n}{2}-1}{n}2\pi + i\sin\frac{\frac{n}{2}-1}{n}2\pi; \ -1.$$

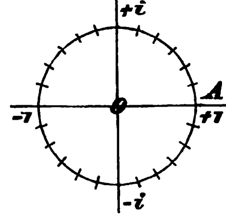
$$\cos\frac{2\pi}{n} - i\sin\frac{2\pi}{n}; \ \ldots \ \cos\frac{\frac{n}{2}-1}{n}2\pi - i\sin\frac{\frac{n}{2}-1}{n}2\pi.$$

Die Wurzel -1 schreibt man zweckmässig unter $+1$. Je zwei unter einander stehende Wurzeln heissen **conjugirte**. Sie unterscheiden sich nur durch das **Vorzeichen des imaginären**.

§ 118.

Abbildung der Wurzeln der positiven Einheit.

Man beschreibe mit dem Radius 1 um O einen Kreis und theile denselben von A aus in n gleiche Theile. Dann stellt jeder Theilpunkt eine $n$te Wurzel der positiven Einheit dar, da er auch gegeben ist durch



$$\cos v\frac{1}{n}2\pi + i\sin v\frac{1}{n}2\pi.$$

Ist n gerade, so fällt ein Theilpunkt auf $+1$ und ein Theilpunkt auf -1. In diesem Falle sind also zwei reelle Wurzeln vorhanden.

Ist n ungerade, so fällt kein Theilpunkt auf -1, und die Gleichung $x^n - 1 = 0$ hat nur eine reelle Wurzel.

Die durch A abgebildete Wurzel, für welche $\nu = 0$ ist, heisst die Hauptwurzel.

Primitivwurzeln.

Primitivwurzeln sind solche Wurzeln, aus denen man alle anderen durch Potenzirung ableiten kann. Nun hat eine beliebige $n$te Wurzel der positiven Einheit den Werth

$$\cos\frac{2\nu\pi}{n} + i\sin\frac{2\nu\pi}{n}.$$

Durch Potenzirung mit μ geht die complexe über in

$$\cos\frac{\mu 2\nu\pi}{n} + i\sin\frac{\mu 2\nu\pi}{n}.$$

Ist nun ν nicht gleich Null (die herausgegriffene Wurzel also keine Hauptwurzel) und sind ν und n relative Primzahlen, so nimmt dieser Ausdruck n verschiedene Werthe an, wenn man für μ die Zahlen

$$1, 2, 3 \ldots n$$

setzt.

Nach unseren früheren Betrachtungen können diese n verschiedenen Werthe nur die n Wurzeln der Gleichung

$$x^n - 1 = 0$$

sein.

Ferner ergibt sich leicht, dass so viel Primitivwurzeln vorhanden sind, als n Primfaktoren enthält.

§ 119.

Auflösung der Gleichung $x^n + 1 = 0$.

Verfährt man so wie bei der Auflösung der Gleichung $x^n - 1 = 0$, so erhält man

$$r = 1; \quad \cos n\varphi = -1; \quad \sin n\varphi = 0,$$

woraus

$$n\varphi = (2\nu + 1)\pi$$

folgt.

Aus einem Schema, dessen mittlere Horizontalreihe

$$\frac{\pi}{n}, \quad \frac{3\pi}{n}, \quad \frac{5\pi}{n}, \ldots \frac{2n-1}{n}\pi$$

ist, sieht man sofort, dass man alle möglichen Wurzelwerthe erhält, wenn man für ν die Zahlen

$$0, 1, 2, \ldots n-1$$

der Reihe nach einsetzt.

Für ungerade und gerade n erhält man:

I. Ungerades n:

$$\frac{\pi}{n}; \qquad \frac{3\pi}{n} \ldots \qquad \frac{(n-3)\pi}{n}; \quad \pi;$$

$$2\pi - \frac{\pi}{n}; \quad 2\pi - \frac{3\pi}{n} \ldots \quad 2\pi - \frac{n-2}{n}\pi;$$

II. Gerades n:

$$\frac{\pi}{n}; \qquad \frac{3\pi}{n}; \ldots \qquad \frac{n-1}{n}\pi$$

$$2\pi - \frac{\pi}{n}; \quad 2\pi - \frac{3\pi}{n}; \ldots 2\pi - \frac{n-1}{n}\pi.$$

Es hat demnach die Gleichung

$$x^n + 1 = 0$$

eine reelle Wurzel, wenn n ungerade ist; nur imaginäre, wenn n gerade ist.

§ 120.

Aufgaben.

1) Gib die 2ten Wurzeln der positiven Einheit an.

Antwort: $+1, \ -1.$

2) Welche Werthe haben die dritten Wurzeln der positiven Einheit?

Antwort: $1; \quad \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}; \quad \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$

3) Die 4ten Wurzeln der positiven Einheit?

Antwort:

$$+1; \quad \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2};$$

$$-1; \quad \frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}.$$

4) Beweise, dass das Produkt aus je zwei conjugirten $n$ten Wurzen der positiven Einheit gleich ist.

Bemerkung. Der Beweis wird durch Ausführung der Multiplikation geliefert.

5) Wie lauten die 2ten Wurzeln aus der negativen Einheit?

Antwort: $+i; \; -i.$

6) Wie die 3ten?

Antwort: $-1; \; \frac{1+i\sqrt{3}}{2}; \; \frac{1-i\sqrt{3}}{2}.$

7) Beweise den Satz in 4) auch für die Wurzeln der negativen Einheit.

8) Drücke die complexe Zahl $1+3i$ durch trigonometrische Funktionen aus.

Bemerkung. Das Winkelmaass ist nach dem Aufschlagen in den Tafeln noch auf Bogenmaass zu reduciren.

9) Ebenso die Zahl

$$9-5i.$$

10) Ferner

$$-3+7i.$$

11) Löse die reine Gleichung $n$ten Grades

$$x^n - a = 0$$

auf, wo a reell ist.

12) Unter derselben Bedingung

$$x^n + a = 0.$$

13) Löse die Gleichung

$$x^n - (\alpha + \beta i) = 0$$

auf.

Anmerkung. Es ist erst $\alpha + \beta i = \varrho(\cos\psi + i\sin\psi)$ zu machen.

14) Es soll die Gleichung

$$x^n + (\alpha + \beta i) = 0$$

aufgelöst werden.

15) Es ist zu beweisen, dass die Auflösung der Gleichungen 11), 12), 13) und 14) auf die Auflösung der beiden Gleichungen $x^n - 1 = 0$ und $x^n + 1 = 0$ zurückgeführt werden kann.

16) Es ist durch Rechnung zu beweisen, dass $x^n - 1$ durch $x - 1$ ohne Rest theilbar ist.

17) Ebenso, dass $x^n + 1$ durch $x + 1$ ohne Rest theilbar ist, wenn n ungerade ist.

18) Wie viel Werthe hat $\sqrt[n]{a}$, wenn man die Rechnung mit complexen zulässt?

§ 121.

Entwickelung des Produktes von n linearen Funktionen mit einer Veränderlichen.

Durch Ausführung der Rechnung findet man

$$1)\quad (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) = x^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)\,x + \alpha_1\,\alpha_2;$$

$$2)\quad (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) = x^3 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\,x^2 + (\alpha_1\,\alpha_2 + \alpha_2\,\alpha_3 + \alpha_3\,\alpha_1)\,x - \alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,.$$

In der Entwickelung von 1) ist also der Coefficient von x die negativ genommene Summe der Combinationen ohne Wiederholung zur ersten Classe der Elemente α_1 und α_2, während das von x freie Glied die Combination derselben Elemente zur zweiten Classe enthält. Wir bezeichnen diese Coefficienten mit

$$-\,\mathfrak{C}_2^{(1)};\quad +\,\mathfrak{C}_2^{(2)}.$$

Aehnliches gilt für die Funktion 2), wo in der Entwickelung die selbstverständlichen Coefficienten

$$-\,\mathfrak{C}_3^{(1)};\quad +\,\mathfrak{C}_3^{(2)};\quad -\,\mathfrak{C}_3^{(3)}$$

auftreten. Gilt das hier angedeutete Entwickelungsgesetz allgemein?

Es sei

$$3)\ f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)\ldots(x - \alpha_n)$$
$$= x^n - \mathfrak{C}_{(n)}^{(1)}\,x_{n-1} + \mathfrak{C}_n^{(2)}\,x_{n-2} - \ldots \pm \mathfrak{C}_n^{n-1}\,x \mp \mathfrak{C}_n^{(n)},$$

dann wird

4) $$(x-\alpha_{n+1})f(x)=x^{n+1}-\mathfrak{C}_n^{(1)}x^n+\mathfrak{C}_n^{(2)}x^{n-1}-\ldots\pm\mathfrak{C}_n^{(n-1)}x^2\mp\mathfrak{C}_n^{(n)}x$$
$$-\alpha_{n+1}x^n+\alpha_{n+1}\mathfrak{C}_n^{(1)}x^{n-1}-\ldots\mp\alpha_{n+1}\cdot\mathfrak{C}_n^{(n-1)}\pm\mathfrak{C}_n^{(n)}\alpha_{n+1}.$$

Nun ist

$$\mathfrak{C}_n^{(1)}=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n,$$

also

5) $$\mathfrak{C}_n^{(1)}+\alpha_{n+1}=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n+\alpha_{n+1}=\mathfrak{C}_{n+1}^{(1)}.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}_n^{(2)}=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\ldots&+\alpha_1\alpha_n\\+\alpha_2\alpha_3+\ldots&+\alpha_2\alpha_n\\&\vdots\\&+\alpha_{n-1}\alpha_n;\end{aligned}$$

demnach

6) $$\begin{aligned}\mathfrak{C}_n^{(2)}+\alpha_{n+1}\mathfrak{C}_n^{(1)}=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\ldots+\alpha_1\alpha_n&+\alpha_1\alpha_{n+1}\\+\alpha_2\alpha_3+\ldots+\alpha_2\alpha_n&+\alpha_2\alpha_{n+1}\\&\vdots\\&+\alpha_n\alpha_{n+1}\\=\mathfrak{C}_{n+1}^{(2)}\end{aligned}$$

u. s. f.

Daher kann man unter der Voraussetzung der Gültigkeit der Entwickelung für n lineare Funktionen der angegebenen Form

7) $$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{n+1})=x^{n+1}-\mathfrak{C}_{n+1}^{(1)}x^n+\mathfrak{C}_{n+1}^{(2)}x^{n-1}-\ldots\pm\mathfrak{C}_{n+1}^{(n+1)}$$

setzen.

Da die Richtigkeit der Entwickelung für $n=2$ und $n=3$ bewiesen ist, so gilt sie demnach allgemein für alle n.

Nach § 17 ist die Anzahl der Glieder in

$$\mathfrak{C}_{(n)}^{(1)}\ \frac{n}{1}=n_1,\ \text{in}\ \mathfrak{C}_n^{(2)}\ \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}=n_2,\ \text{in}\ \mathfrak{C}_n^{(3)}\ \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}=n_3$$

u. s. f.

Ist nun

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_n,$$

so wird

$$\mathfrak{C}_n^{(1)} = n_1\, \alpha_1, \quad \mathfrak{C}_n^{(2)} = n_2\, \alpha_1^2, \quad \mathfrak{C}_n^{(3)} = n_3\, \alpha_1^3 \ldots,$$

womit man

8) $(x - \alpha_1)^n = x^n - n_1\, x^{n-1}\, \alpha_1 + n_2\, x^{n-2}\, \alpha_1^2 - \ldots \pm n_n\, \alpha_1^n$

und

9) $(x + \alpha_1)^n = x^n + n_1\, x^{n-1}\, \alpha_1 + n_2\, x^{n-2}\, \alpha_1^2 + \cdots + n_n\, \alpha_1^n$

erhält.

Diese Formeln werden als der binomische Lehrsatz bezeichnet.

§ 122.

Stetigkeit der ganzen rationalen algebraischen Funktionen.

Eine ganze rationale algebraische Funktion vom $n$ten Grade mit einer Veränderlichen hat die Form

1) $\qquad f(x) = a_0\, x^n + a_1\, x^{n-1} + a_2\, x^{n-2} + \ldots + a_n.$

Aendert sich x in $x + h$, so wird

$$f(x+h) = a_0\,(x+h)^n + a_1\,(x+h)^{n-1} + a_2\,(x+h)^{n-2} + \ldots + a^n$$

und mit Anwendung der Gleichung 9) des vorigen §

2) $$\begin{aligned} f(x+h) = {} & a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n \\ & + h\,[n_1\, a_0\, x^{n-1} + (n-1)_1\, a_1\, x^{n-2} + (n-2)_1\, a_2 x^{n-3} + \ldots] \\ & + h^2\,[n_2 a_0 x^{n-2} + (n-1)_2\, a_1\, x^{n-3} + (n-2)_2\, a_2 x^{n-4} + \ldots] \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + h^n\,[n_n\, a_0]. \end{aligned}$$

Die mit h, resp. mit den Potenzen von h multiplicirten Ausdrücke haben für jedes endliche x einen endlichen Werth. Bezeichnen wir für ein gegebenes x den grössten dieser Coefficienten mit G und ist h ein echter Bruch, so ist

3) $$f(x+h) - f(x) < G \cdot h,$$

da eine ganze positive Potenz eines echten Bruches kleiner als dieser Bruch ist.

Ist nun ε eine noch so kleine gegebene Zahl, z. B. $\frac{1}{10^{20}}$, so kann man doch einen Werth von h so bestimmen, dass

$$G \cdot h < \varepsilon$$

ist; man setzt z. B.

$$h = \frac{\varepsilon}{10\,G}.$$

Demnach lässt sich x um eine so kleine Grösse h ändern, dass sich dadurch die Funktion um weniger als eine noch so kleine gegebene Grösse ändert.

Hat eine Funktion für einen bestimmten Werth x_0 von x diese Eigenschaft, so heisst sie stetig in der Nähe von $x = x_0$.

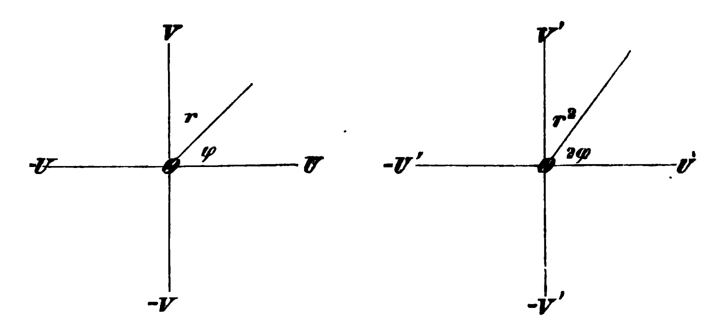
Die Funktion $f(x)$ besitzt diese Eigenschaft, welchen endlichen Werth man auch für x setzen mag. Daher gilt der Satz:

Jede ganze rationale algebraische Funktion ist überall stetig.

§ 123.

Eindeutigkeit der ganzen rationalen algebraischen Funktionen mit einer Veränderlichen.

Wir haben bereits früher ausgeführt, wie man eine gegebene complexe Zahl als Punkt in der Ebene darstellen kann. Dieses Verfahren wollen wir jetzt auf die Funktionen von complexen Zahlen ausdehnen. Nehmen wir zu diesem Zwecke zwei Achsensysteme UV und $U'V'$ an, von denen



das erste zur Darstellung der Zahlen x, das zweite zur Abbildung der Funktionen von x dient. Es sei z. B. die Funktion

$$f(x) = x^2$$

die gegebene.

Jedem Punkte

$$x = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

entspricht ein Punkt

$$f(x) = r^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi).$$

Durchläuft nun der Punkt x alle Punkte der positiven Seite der U-Achse von 0 bis ∞, so durchläuft $f(x) = x^2$ alle Punkte der positiven Seite der U'-Achse. Stellt x einen negativen Punkt der U-Achse dar, so ist gleichwohl $f(x) = x^2$ ein Punkt der positiven Seite der U'-Achse, so dass diese die ganze U-Achse abbildet.

Durchläuft x die positive Seite der V-Achse, so bleibt $f(x) = x^2$ auf der negativen Seite der U'-Achse.

Durchläuft der Punkt x einen Kreis mit dem Radius r, so durchläuft $f(x)$ zweimal einen Kreis mit dem Radius r^2 u. s. f.

Jedem Punkte x entspricht ein und nur ein ganz bestimmter Punkt der Abbildung $f(x) = x^2$.

Wegen dieser Eigenschaft nennt man die Funktion $f(x) = x^2$ eine eindeutige Funktion von x.

Ebenso lässt sich zeigen, dass bx^ν eine eindeutige Funktion ist, wo ν eine ganze positive Zahl und b ein beliebiger Coefficient ist. Damit ergibt sich aus der Lehre von der Addition complexer Zahlen, dass auch ein Aggregat solcher Ausdrücke eine eindeutige Funktion ist, und dass somit die Sätze richtig sind:

Jede ganze rationale algebraische Funktion ist eine eindeutige Funktion, und:

Die Abbildung einer geschlossenen Curve durch eine ganze rationale algebraische Funktion ist wieder eine geschlossene Curve.

§ 124.

Abbildung eines Kreises mit sehr grossem Radius.

Die gegebene Funktion sei

$$1) \qquad f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a^n,$$

wo $a_0, a_1, a_2 \ldots a_n$ reelle Coefficienten sein mögen.

Für

$$2)\qquad x = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

wird

$$f(x) = a_0 r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$
$$+ a_1 r^{n-1} [\cos(n-1)\varphi + i\sin(n-1)\varphi] + \ldots = C + iS,$$

wo

$$3)\qquad C = a_0 r^n \cos n\varphi + a_1 r^{n-1}\cos(n-1)\varphi$$
$$+ a_2 r^{n-2}\cos(n-2)\varphi + \ldots + a_n,$$

$$4)\quad S = a_0 r^n \sin n\varphi + a_1 r^{n-1}\sin(n-1)\varphi + \ldots + a_{n-1} r \sin\varphi$$

ist. Hieraus folgt

$$C^2 = a_0^2 r^{2n}\cos^2 n\varphi + 2\,a_0 a_1 r^{2n-1}\cos n\varphi\cos(n-1)\varphi$$
$$+ r^{2n-2}[2\,a_0 a_2 \cos n\varphi\cos(n-2)\varphi + a_1^2\cos^2(n-1)\varphi]$$
$$+ 2r^{2n-3}[a_0 a_3 \cos n\varphi\cos(n-3)\varphi + a_1 a_2 \cos(n-1)\varphi\cos(n-2)\varphi]$$
$$+ \ldots + a_n^2,$$

$$S^2 = r^{2n} a_0^2 \sin^2 n\varphi + 2\,r^{2n-1} a_0 a_1 \sin n\varphi \sin(n-1)\varphi$$
$$+ r^{2n-2}[2\,a_0 a_2 \sin n\varphi\sin(n-2)\varphi + a_1^2\sin^2(n-1)\varphi]$$
$$+ 2r^{2n-3}[a_0 a_3 \sin n\varphi \sin(n-1)\varphi + a_1 a_2 \sin(n-1)\varphi\sin(n-2)\varphi]$$
$$+ \ldots + a_{n-1}^2 r^2 \sin^2\varphi,$$

$$C^2 + S^2 = a_0^2 r^{2n} + 2r^{2n-1} a_0 a_1 \cos\varphi + r^{2n-2}[2\,a_0 a_2 \cos 2\varphi + a_1^2]$$
$$+ 2\,r^{2n-3}[a_0 a_3 \cos 3\varphi + a_1 a_2 \cos\varphi] + \ldots + a_n^2.$$

Den absoluten Werth des grössten der Coefficienten von r nennen wir g, dann ist

$$C^2 + S^2 < a_0^2 r^{2n} + g(r^{2n-1} + r^{2n-2} + \ldots + r + 1)$$
$$C^2 + S^2 > a_0^2 r^{2n} - g(r^{2n-1} + r^{2n-2} + \ldots + r + 1).$$

Ist nun $r > 1$, so ist die aus $2n$ Gliedern bestehende Reihe

$$r^{2n-1} + r^{2n-2} + \ldots + 1 < 2n \cdot r^{2n-1}.$$

Daher erhält man erst recht

$$C^2 + S^2 < a_0^2 r^{2n} + 2\,ng\,r^{2n-1},$$
$$C^2 + S^2 > a_0^2 r^{2n} - 2\,ng\,r^{2n-1},$$

oder

$$5)\qquad C^2 + S^2 < a_0^2 r^{2n}\left(1 + \frac{2ng}{a_0^2 r}\right),$$

$$6)\qquad C^2 + S^2 > a_0^2 r^{2n}\left(1 - \frac{2ng}{a_0^2 r}\right).$$

Somit liegt $C^2 + S^2$ zwischen den beiden Ausdrücken der rechten Seite. Nun kann man $\frac{2ng}{a_0^2 r}$ kleiner als eine noch so kleine gegebene Grösse ε, z. B. kleiner als $\frac{1}{10^7}$ machen. Man setze nur

$$\frac{2ng}{a_0^2 r} < \varepsilon$$

$$\frac{2ng}{a_0^2 \varepsilon} < r.$$

Wählt man also r gross genug, so kann man den Ausdruck in der Klammer von 5) und 6) mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit gleich 1 setzen. Dann wird

$$7)\qquad C^2 + S^2 = a_0^2 r^{2n}$$

und der Modul von $f(x)$

$$8)\qquad +\sqrt{C^2 + S^2} = a_0 r^n = R.$$

Halten wir r fest und lassen φ alle Werthe von 0 bis 2π annehmen, so durchläuft x einen Kreis mit dem Radius r, dessen Mittelpunkt der Nullpunkt ist.

Die Abbildung dieses Kreises durch $f(x)$ ist eine geschlossene Curve nach § 123; die Punkte derselben haben eine constante Entfernung R vom Nullpunkte nach der Gleichung 8) und die Abbildung ist daher ein Kreis um den Nullpunkt.

§ 125.

Existenz einer Wurzel.

Lassen wir nunmehr r kleinere Werthe annehmen, für jedes r aber φ alle Werthe von 0 bis 2π durchlaufen, so ergibt sich für jedes r eine geschlossene Curve, die innerhalb des im vorigen § abgeleiteten Kreises liegt. Da die Funktion $f(x)$ nach § 122 überall stetig ist, so müssen, wenn r stetig geändert wird, diese Curven so in einander übergehen, dass kein Punkt zwischen zwei beliebigen dieser Curven vorhanden

ist, durch den nicht eine Curve ginge, weil sonst die Funktion in der Nähe dieses Funktionswerthes unstetig wäre.

Für $r = 0$ ist $f(x) = a_n$. Zwischen a_n und jenem grossen Kreise liegt der Nullpunkt. Demnach wird ein Punkt x durch den Nullpunkt abgebildet, d. h. für ein x ist

$$f(x) = 0.$$

Bei der letzten Folgerung haben wir $a_n \lessgtr 0$ vorausgesetzt. Wäre $a_n = 0$, so würde für $x = 0$ selbstverständlich $f(x) = 0$ sein, so dass wir den Lehrsatz aussprechen können:

Jede ganze rationale algebraische Funktion verschwindet für einen Werth x_1 der Variabelen.

Diesen Werth x_1 nennt man eine Wurzel der Funktion $f(x)$.

§ 126.

Anzahl der Wurzeln.

Nach dem letzten Ergebniss gibt es einen Werth $x = x_1$, für den die Funktion

1) $$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n$$

verschwindet. Daher ist

2) $$0 = a_0 x_1^n + a_1 x_1^{n-2} + a_2 x_1^{n-1} + \cdots + a_n,$$

woraus durch Subtraktion

$$f(x) = a_0(x^n - x_1^n) + a_1(x^{n-1} - x_1^{n-1}) + a_2(x^{n-2} - x_1^{n-2}) + \cdots + a_{n-1}(x - x_1)$$

oder

3) $$f(x) = (x - x_1)\,[a_0 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \cdots + b_n]$$

hervorgeht.

Nach § 125 hat die Funktion

$$f_1(x) = a_0 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \cdots + b_n$$

eine Wurzel x_2; so dass man durch dieselbe Rechnung, wie vorhin, die Gleichung bekommt

4) $$f_1(x) = (x - x_2)\,[a_0 x^{n-2} + c_3 x^{n-3} + \cdots + c_n].$$

Fährt man so fort, so erhält man schliesslich

$$\underset{n-2}{f(x)} = (x - x_{n-1})\,(a_0 x + N).$$

Setzt man hierin

$$x_n = -\frac{N}{a_0},$$

so wird

$$a_0 x_1 + N = a_0(x - x_n).$$

Also ist

5) $$f(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\dots(x - x_n).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung verschwindet, wenn man x einen beliebigen der Werthe $x_1, x_2, \dots x_n$ beilegt; sie verschwindet aber für keinen anderen Werth von x. Dieselben Eigenschaften muss die linke Seite haben. Hieraus ergibt sich der Satz:

Jede ganze rationale algebraische Funktion vom $n$ten Grade verschwindet für n Werthe und nur für n Werthe der Variabelen.

Aus dieser Untersuchung folgt ferner, dass eine ganze rationale algebraische Funktion vom $n$ten Grade, abgesehen von einem constanten Faktor, vollständig bestimmt ist, wenn die n Werthe der Veränderlichen gegeben sind, für welche die Funktion verschwindet.

Ist

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n,$$

so ist

6) $$f(x) = a_0(x - x_1)^n.$$

Um für diesen Fall den vorhin abgeleiteten Satz aufrecht zu erhalten, sagt man, die Funktion habe n gleiche Wurzeln.

§ 127.

Folgerungen.

1) Verschwindet eine ganze rationale algebraische Funktion vom $n$ten Grade mit einer Veränderlichen für mehr als n von einander verschiedene Werthe, so sind alle Coefficienten gleich Null.

2) Die Funktion

1) $$\varphi(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n$$

mag von demselben Grade mit der Funktion

2) $$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

sein, widrigenfalls wir einige Coefficienten $b_0, b_1 \ldots$ gleich Null einführen. Durch Subtraktion entsteht hieraus

3) $f(x) - \varphi(x) = (a_0 - b_0)x^n + (a_1 - b_1)x^{n-1} + \cdots + (a_n - b_n).$

Ist nun für mehr als n Werthe der Veränderlichen

$$f(x) = \varphi(x),$$

so verschwindet für mehr als n Werthe der Veränderlichen die Funktion

$$\Phi = f(x) - \varphi(x).$$

Daher müssen alle Coefficienten verschwinden und man hat

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad \ldots a_n = b_n.$$

Stimmen aber zwei Funktionen innerhalb eines Gebietes, z. B. für alle reellen zwischen α und β liegenden x überein, so ist die gemachte Voraussetzung erfüllt, und wir gewinnen den Satz:

Sind zwei ganze rationale algebraische Funktionen für alle Werthe eines Gebietes gleich, so sind sie identisch.

3) Sind alle Coefficienten einer rationalen ganzen algebraischen Funktion reelle Zahlen und wird für

1) $$x = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

die Funktion

2) $$f(x) = C + iS,$$

so ist für

3) $$x = r(\cos\varphi - i\sin\varphi)$$

4) $$f(x) = C - iS,$$

was sofort aus den Ausdrücken 3) und 4) in § 124 erhellt.

Wenn nun für einen Werth von x die Funktion $f(x)$ verschwindet, so verschwinden auch C und S. Genügt demnach der Werth $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ der Gleichung

$$f(x) = 0,$$

so wird dieselbe auch von dem Werthe $r(\cos\varphi - i\sin\varphi)$ befriedigt. Oder anders ausgesprochen:

Verschwindet eine ganze rationale Funktion mit nur reellen Coefficienten für einen complexen Werth der Veränderlichen, so verschwindet sie auch für den conjugirten Werth.

4) Das Produkt der beiden aus diesen Wurzelwerthen entspringenden Faktoren ist

$$(x - r\cos\varphi - ir\sin\varphi)(x - r\cos\varphi + ir\sin\varphi)$$
$$= x^2 - 2rx\cos\varphi + r^2,$$

also reell und in Bezug auf x vom zweiten Grade. Daher ergibt sich der Satz:

Jede ganze rationale algebraische Funktion mit nur reellen Coefficienten lässt sich in reelle Faktoren vom ersten und zweiten Grade zerlegen.

§ 128.

Aufgaben.

1) Entwickele nach § 121

$$(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5)(x - 6)$$

nach fallenden Potenzen von x.

2) Entwickele ebenso

$$(x + 1)(x - 2)(x + 3)(x - 4)(x - 5)(x - 6).$$

3) Bilde einen Kreis mit dem Radius r durch die Funktion ab

$$f(x) = x^3.$$

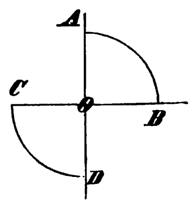
Anmerkung. Es ist die Curve anzugeben, welche x^3 durchläuft, wenn x einen Kreis durchläuft.

4) Bilde das Dreieck OAB, in welchem der Winkel $AOB = \frac{\pi}{4}$ und $ABO = \frac{\pi}{2}$ ist, durch

$$f(x) = 5x^2 + 10x + 9$$

ab.

5) Es durchlaufe x OA, dann AB, BC, CD, DO, wo dem absoluten Werthe nach $OA = OB = OC = OD = 1$ ist. Es soll diese Curve durch $27x^3 = f(x)$ abgebildet werden.



6) Bilde den Kreis mit dem Radius 1 durch die Funktion

$$a_0x^2 + a_1x + a_2$$

unter der Voraussetzung ab, dass die Coefficienten a_0, a_1, a_2 complexe Zahlen sind.

7) Führe den Beweis in § 124 für das Beispiel

$$a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4$$

durch, wo jedoch a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 complex sein sollen.

8) Liefere den Beweis allgemein für

$$f(x) = a_0 x_n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

und complexe $a_0, a_1 \ldots a_n$.

9) Eine ganze rationale algebraische Funktion vom 6ten Grade verschwindet für folgende Werthe der Veränderlichen

$$+3,\ +5,\ -6,\ +9,\ +1,\ -1.$$

Schreibe die Funktion geordnet nach fallenden Potenzen der Veränderlichen hin und setze den unbestimmten Coefficienten $a_0 = 1$.

10) Es ist dieselbe Aufgabe für die Wurzeln

$$+3,\ +5,\ +2-3i,\ +4+5i,\ +1,\ -1$$

zu lösen.

11) Ebenso für

$$+3,\ +5,\ +2-3i,\ +2+3i,\ +1,\ -1.$$

12) Zerlege

$$f(x) = x^5 - 1$$

in reelle Faktoren des ersten und zweiten Grades.

13) Zerlege ebenso

$$f(x) = x^n - 1.$$

14) Ferner

$$f(x) = x^n + 1.$$

Sechster Abschnitt.

Symmetrische Funktionen der Wurzeln.

§ 129.

Division einer algebraischen Funktion durch eine andere.

Ist eine ganze rationale Funktion

$$1)\qquad \varphi(x) = b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + b_3 x^{n-3} + \ldots + b_n$$

durch eine andere

$$2)\qquad f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n$$

zu dividiren, so kann der Quotient entweder als eine nach fallenden Potenzen von x fortschreitende Reihe

$$3)\qquad \Phi(x) = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \frac{c_3}{x^3} + \frac{c_4}{x^4} + \ldots,$$

oder als eine solche, die nach steigenden Potenzen von x fortschreitet, nämlich

$$4)\qquad \Psi(x) = d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + d_3 x^3 + \ldots$$

erhalten werden. Im ersten Falle ordnet man die Funktionen $\varphi(x)$ und $f(x)$ nach fallenden Potenzen, im zweiten nach steigenden Potenzen von x und dividirt wie bei ganzen Zahlen. Das erste Verfahren wendet man bei grossen, das zweite bei kleinen Werthen von x an. Diese Methode setzen wir als bekannt voraus und der Leser kann sich den Sinn derselben leicht an den beigegebenen Aufgaben wieder vergegenwärtigen und klar machen.

Um elegantere Resultate zu erhalten und ein wichtiges Princip zu erläutern, bedienen wir uns der Methode der unbestimmten Coefficienten, die wir an den Fall knüpfen, in welchem der Grad des Dividendus um 1 niedriger ist als der Grad des Divisors, weil wir nur diesen Specialfall zur Anwendung zu bringen haben, obgleich die Methode eine unbeschränkte Anwendung gestattet.

Wenn

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \frac{c_3}{x^3} + \ldots + \frac{c_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{c_n}{x^n} + \ldots,$$

sein soll, so muss

$$\left(\frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \ldots\right)(a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n)$$
$$= b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \ldots + b_{n-1} x + b_n$$

sein. Führen wir die Multiplikation aus und setzen die Coefficienten von x^{n-1}, $x^{n-2} \ldots x$, x^0, $\frac{1}{x} \ldots$ auf beiden Seiten gleich, so ergeben sich die folgenden Bestimmungsgleichungen für die unbestimmten Coefficienten $c_1, c_2, \ldots$:

$$\begin{array}{llllll}
a_0 c_1 & \ldots & & & & = b_1 \\
a_1 c_1 & + a_0 c_2 & \ldots & & & = b_2 \\
a_2 c_1 & + a_1 c_2 & + a_0 c_3 & \ldots & & = b_3 \\
\vdots & & & & & \\
a_{n-1} c_1 & + a_{n-2} c_2 & + a_{n-3} c_3 & + \ldots + a_0 c_n & \ldots & = b_n \\
a_n c_1 & + a_{n-1} c_2 & + a_{n-2} c_3 & + \ldots + a_0 c_{n+1} & \ldots & = 0 \\
 & a_n c_2 & + a_{n-1} c_3 & + \ldots + \ldots + & a_0 c_{n+2} & = 0 \\
 & & a_n c_3 & + \ldots + \ldots + & a_0 c_{n+3} & = 0. \\
\ldots & & & & &
\end{array}$$

Die erste Gleichung dieses Systems liefert den Werth für c_1, die beiden ersten c_1 und c_2, die r ersten die Werthe für $c_1, c_2, c_3 \ldots$ bis c_r. Diese r Gleichungen sind linear in Bezug auf diese Unbekannten, und die Determinante des Systems

$$6) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 \ldots 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 \ldots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r-1} & a_{r-2} & a_{r-3} & \ldots a_0 \end{vmatrix} = a_0^r$$

ist von Null verschieden. Das System ist daher auflösbar. Man erhält

$$7) \qquad c_1 = \frac{1}{a_0} b_1; \quad c_2 = \frac{1}{a_0^2} \begin{vmatrix} a_0 & b_1 \\ a_1 & b_2 \end{vmatrix}; \quad c_3 = \frac{1}{a_0^3} \begin{vmatrix} a_0 & 0 & b_1 \\ a_1 & a_0 & b_2 \\ a_2 & a_1 & b_3 \end{vmatrix};$$

$$c_r = \frac{1}{a_0^{\,r}} \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & \dots & b_1 \\ a_1 & a_0 & 0 & \dots & b_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r-1} & a_{r-2} & a_{r-3} & \cdot & b_r \end{vmatrix}.$$

Auf dieselbe Art liefert die Entwickelung 4) das Gleichungssystem

8)
$$\begin{aligned} a_n d_0 \quad \dots\dots\dots\dots &= b_n \\ a_{n-1} d_0 + a_n d_1 \quad \dots\dots\dots &= b_{n-1} \\ a_{n-2} d_0 + a_{n-1} d_1 + a_n d_2 \quad \dots\dots &= b_{n-2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \end{aligned}$$

mit den Auflösungen

9)
$$d_0 = \frac{1}{a_n} b_n;\ d_1 = \frac{1}{a_n^{\,2}} \begin{vmatrix} a_n & b_n \\ a_{n-1} & b_{n-1} \end{vmatrix};\ d_2 = \frac{1}{a_n^{\,3}} \begin{vmatrix} a_n & 0 & b_n \\ a_{n-1} & a_n & b_{n-1} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-2} \end{vmatrix}$$

u. s. f.

§ 130.

Die erste Ableitung.

Nach § 122 heisst der Coefficient von h in der Entwickelung von $f(x+h)$

1)
$$f'(x) = n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + (n-2) a_2 x^{n-3} + \dots + a_{n-1},$$

wenn

2)
$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n$$

ist. Die Funktion $f'(x)$ heisst die erste Ableitung oder die erste Derivirte von $f(x)$.

Sind $x_1, x_2 \dots x_n$ die Wurzeln der Funktion $f(x)$, so ist

$$f(x) = a_0 (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n)$$

und

$$\begin{aligned} f(x+h) &= a_0 (x + h - x_1)(x + h - x_2) \dots (x + h - x_n) \\ &= a_0 [(x - x_1) + h][(x - x_2) + h] \dots [(x - x_n) + h]. \end{aligned}$$

Entwickeln wir dieses Produkt nach fallenden Potenzen von h, so ist nach § 121 der Coefficient von h

$$a_0(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})+a_0(x-x_1)(x-x_2)\cdots \times (x-x_{n-2})(x-x_n)+\cdots+a_0(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n).$$

Diese Summe muss also ebenfalls die erste Ableitung sein. Hieraus gehen die Gleichungen

$$3)\ f'(x)=a_0(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)+a_0(x-x_1)(x-x_3)\cdots \times (x-x_n)+\cdots+a_0(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})$$

und

$$4)\quad \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\frac{1}{x-x_3}+\cdots+\frac{1}{x-x_n}$$

hervor.

§ 131.

Potenzsummen der Wurzeln.

Führen wir die Divisionen $\frac{1}{x-x_1}, \frac{1}{x-x_2}\cdots$ nach fallenden Potenzen von x geordnet nach dem gewöhnlichen Verfahren aus, so erhalten wir aus 4) in § 130

$$\begin{aligned}\frac{f'(x)}{f(x)}=&\frac{1}{x}+\frac{x_1}{x^2}+\frac{x_1^2}{x^3}+\frac{x_1^3}{x^4}+\frac{x_1^4}{x^5}+\cdots\\ &+\frac{1}{x}+\frac{x_2}{x^2}+\frac{x_2^2}{x^3}+\frac{x_2^3}{x^4}+\frac{x_2^4}{x^5}+\cdots\\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ &+\frac{1}{x}+\frac{x_n}{x^2}+\frac{x_n^2}{x^3}+\frac{x_n^3}{x^4}+\frac{x_n^4}{x^5}+\cdots\end{aligned}$$

oder

$$1)\quad \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{n}{x}+\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{x^2}+\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{x^3}+\frac{x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3}{x^4}+\cdots,$$

wo also in den Dividenden die Summen von ganzen positiven gleich hohen Potenzen der Wurzeln der Funktion $f(x)$ auftreten.

Dividiren wir nun in

$$2)\ \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+(n-2)a_2x^{n-3}+\cdots+a_{n-1}}{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n}$$

nach der Methode der unbestimmten Coefficienten, so erhalten wir

$$3)\qquad \frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}+\frac{c_3}{x^3}+\frac{c_4}{x^4}+\cdots$$

In diesem Ausdrucke sind die Coefficienten durch die Gleichungen 7) in § 129 gegeben. Hiermit ergibt sich durch Gleichsetzung der Coefficienten gleichhoher Potenzen in 3) und 1)

$$4)\qquad \sum_1^n x_r = \frac{1}{a_0^2}\begin{vmatrix} a_0 & na_0 \\ a_1 & (n-1)a_1 \end{vmatrix} = -\frac{a_1}{a_0}.$$

$$\sum_1^n x_r^2 = \frac{1}{a_0^3}\begin{vmatrix} a_0 & 0 & na_0 \\ a_1 & a_0 & (n-1)a_1 \\ a_2 & a_1 & (n-2)a_2 \end{vmatrix};$$

$$\sum_1^n x_r^3 = \frac{1}{a_0^4}\begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & na_0 \\ a_1 & a_0 & 0 & (n-1)a_1 \\ a_2 & a_1 & a_0 & (n-2)a_2 \\ a_3 & a_2 & a_1 & (n-3)a_3 \end{vmatrix};$$

$$\sum_1^n x_r^\mu = \frac{1}{a_0^{\mu+1}}\begin{vmatrix} a_0 & 0 & na_0 \\ a_1 & a_0 & (n-1)a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_\mu & a_{\mu-1} & (n-\mu)a_\mu \end{vmatrix}.$$

Diesen Determinanten geben wir dadurch eine bessere Form, dass wir den Coefficienten a_0 herausheben, die erste Vertikalreihe mit n multipliciren, von der letzten subtrahiren und $(\mu-1)$ Vertauschungen von je zwei Vertikalreihen vornehmen. Es wird dadurch

$$5)\qquad \sum_1^n x_r^\mu = \left(-\frac{1}{a_0}\right)^\mu \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ 3a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & a_0 \\ \mu a_\mu & a_{\mu-1} & a_{\mu-2} & & \dots & a_1 \end{vmatrix}.$$

Wir setzen nun

6)
$$\sum_1^n x_r = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = s_1$$
$$\sum_1^n x_r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = s_2$$

u. s. f. Dann hat man aus 1) und 3)

$$c_1 = n; \quad c_2 = s_1; \quad c_3 = s_2; \quad c_4 = s_3 \ldots$$

und mit Berücksichtigung von 2) dieses § nach § 129, 5) das Gleichungssystem

$$\begin{array}{l}
a_1 + a_0 s_1 \quad \ldots\ldots\ldots = 0 \\
2a_2 + a_1 s_1 + a_0 s_2 \quad \ldots = 0 \\
3a_3 + a_2 s_1 + a_1 s_2 + a_0 s_3 \;. = 0 \\
\vdots \\
r a_r + a_{r-1} s_1 + a_{r-2} s_2 + \cdots a_0 s_r = 0
\end{array}$$

oder

7)
$$\begin{array}{l}
a_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = -a_0 s_1 \\
s_1 a_1 + 2a_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots = -a_0 s_2 \\
s_2 a_1 + s_1 a_2 + 3a_3 \quad \ldots\ldots\ldots = -a_0 s_3 \\
\vdots \\
s_{r-1} a_1 + s_{r-2} a_2 + s_{r-3} a_3 + \cdots + r a_r \;. = -a_0 s_r.
\end{array}$$

Lösen wir dieses System nach $a_1, a_2 \ldots a_r$ auf und transformiren das Resultat, so wird

8)
$$a_r = (-1)^r \cdot \frac{a_0}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots r} \begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & \ldots 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & \ldots 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & \ldots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & (r-1) \\ s_r & s_{r-1} & s_{r-2} & \ldots s_1 \end{vmatrix}.$$

Hiermit sind die beiden Aufgaben gelöst, die Potenzsummen der Wurzeln einer algebraischen Funktion durch die Coefficienten der Funktion, und umgekehrt die Coefficienten durch Potenzsummen der Wurzeln der Funktion auszudrücken. Vergleiche übrigens die Aufgaben 15), 16) und 17) in § 93.

§ 132.

Potenzsummen der Wurzeldifferenzen.

Bekanntlich ist für ein gerades r

$$(x_m - x_p)^r = (x_p - x_m)^r,$$

für ein ungerades r

$$(x_m - x_p)^r = -(x_p - x_m)^r.$$

Nun erhält man für ein gerades r nach dem binomischen Lehrsatze:

$$\begin{aligned}
(x - x_1)^r &= x^r - r_1\, x_1\, x^{r-1} + r_2\, x_1^2\, x^{r-2} - r_3\, x_1^3\, x^{r-3} + \ldots \\
(x - x_2)^r &= x^r - r_1\, x_2\, x^{r-1} + r_2\, x_2^2\, x^{r-2} - r_3\, x_2^3\, x^{r-3} + \ldots \\
&\vdots \\
(x - x_n)^r &= x^r - r_1\, x_n\, x^{r-1} + r_2\, x_n^3\, x^{r-2} - r_3\, x_n^3\, x^{r-3} + \ldots
\end{aligned}$$

woraus durch Addition

$$(x-x_1)^r + (x-x_2)^r + \ldots (x-x_n)^r = n x_1^r - r_1 s_1 x^{r-1} + r_2 s_2 x^{r-2} - r_3 s_3 x^{r-3} + \ldots$$

folgt. Setzt man hierin für x der Reihe nach $x_1, x_2, \ldots x_n$ so ergibt sich

$$\begin{aligned}
(x_1-x_1)^r + (x_1-x_2)^r + \ldots (x_1-x_n)^r &= n x_1^r - r_1 s_1 x_1^{r-1} + r_2 s_2 x_1^{r-2} - r_3 s_3 x_1^{r-3} + \ldots \\
(x_1-x_2)^r + (x_2-x_2)^r + \ldots (x_2-x_n)^r &= n x_2^r - r_1 s_1 x_2^{r-1} + r_2 s_2 x_2^{r-2} - r_3 s_3 x_2^{r-3} + \ldots \\
&\vdots \\
(x_n-x_1)^r + (x_n-x_2)^r + \ldots (x_n-x_n)^r &= n x_n^r - r_1 s_1 x_n^{r-1} + r_2 s_2 x_n^{r-2} - r_3 s_3 x_n^{r-3} + \ldots
\end{aligned}$$

und durch Addition

$$1)\quad 2\Sigma(x_1 - x_2)^r = n s_r - r_1\, s_1\, s_{r-1} + r_2\, s_2\, s_{r-2} - r_3\, s_3\, s_{r-3} + \ldots$$

Da $n = x_1^0 + x_2^0 + \ldots + x_n^0 = s_0$ gesetzt werden kann, und das letzte Glied der rechten Seite gleich dem ersten, das vorletzte gleich dem zweiten u. s. f. ist, so tritt auch jedes Glied der rechten Seiten doppelt auf, mit Ausnahme des mittleren, welches $\pm r_{\frac{r}{2}}\, s_{\frac{r}{2}}^2$ ist. Daher hat man für grade r

$$2)\quad \Sigma(x_1 - x_2)^r = s_0 s_r - r_1 s_1 s_{r-1} + r_2 s_2 s_{r-2} - r_3 s_3 s_{r-3} + \ldots \pm \frac{1}{2}\, r_{\frac{r}{2}}\, s_{\frac{r}{2}}^2.$$

Für ungerade r würde sowohl die linke als auch die rechte Seite in 1) verschwinden, weil je zwei Glieder entgegengesetzt gleich wären.

Nach dem vorigen § sind die Potenzsummen der Wurzeln durch die Coefficienten der gegebenen Funktion rational darstellbar, also auch in Folge der Gleichung 2) alle $\Sigma (x_1 - x_2)^r$.

§ 133.

Die Coefficienten einer Funktion als symmetrische Funktionen der Wurzeln.

Sind $x_1, x_2 \ldots x_n$, wie bisher, die Werthe von x, für welche die Funktion

1) $$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n$$

verschwindet, so ist

2) $$f(x) = a_0 (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_n).$$

Nach § 121 (7) ist daher

3) $$f(x) = a_0 x^n - a_0 \mathfrak{C}_n^{(1)} x^{n-1} - a_0 \mathfrak{C}_n^{(2)} x^{n-2} - a_0 \mathfrak{C}_n^{(3)} x^{n-3} + \ldots,$$

wo

$$\mathfrak{C}_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \Sigma x_1$$
$$\mathfrak{C}_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n = \Sigma x_1 x_2$$
$$\mathfrak{C}_3 = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \ldots + x_{n-2} x_{n-1} x_n = \Sigma x_1 x_2 x_3$$

. . . .

ist. Hieraus folgt durch Vergleichung von 1) mit 3)

4) $$\Sigma x_1 = -\frac{a_1}{a_0}; \quad \Sigma x_1 x_2 x_3 x_4 = \frac{a_4}{a_0}$$
$$\Sigma x_1 x_2 = \frac{a_2}{a_0}; \quad \Sigma x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 = -\frac{a_5}{a_0}$$
$$\Sigma x_1 x_2 x_3 = -\frac{a_3}{a_0}; \quad \ldots\ldots\ldots$$

§ 134.

Begriff der symmetrischen Funktionen.

Die in § 131, 132 und in 4) des vorigen § betrachteten Funktionen der Wurzeln von $f(x)$ haben die merkwürdige Eigenschaft, dass sie ihren Werth nicht ändern, wie man auch die Grössen $x_1, x_2 \ldots x_n$ permutirt. Solche Funktionen nennt man symmetrische. Kommt in einer solchen ein Glied bx_1^r vor, so enthält sie auch $bx_2^r, bx_3^r \ldots bx_n^r$, weil

sonst der Funktionen-Werth dadurch verändert würde, dass man die Grössen $x_1, x_2 \ldots x_n$ mit einander vertauscht. Aus denselben Gründen muss eine symmetrische Funktion mit dem Gliede $cx_1^k x_2^\lambda$ auch die Glieder $cx_1^k x_3^\lambda; \ldots cx_1^k x_n^\lambda, cx_2^k x_1^\lambda \ldots$ $cx_{n-1}^k x_n^\lambda, cx_n^k x_{n-1}^\lambda$ enthalten u. s. f. Eine symmetrische Funktion der Wurzeln hat daher nothwendig die Form:

$$5)\quad \Phi(x_1, x_2 \ldots x_n) = b_0 + b_1 \Sigma x_1 + b_2 \Sigma x_1^2 + b_{12} \Sigma x_1 x_2 + b_3 \Sigma x_1^3 + b_{112} \Sigma x_1^2 x_2 + b_{123} \Sigma x_1 x_2 x_3 + \ldots$$

wo auch einige der Coefficienten b verschwinden können. Bedienen wir uns des Ausdruckes Gruppe für ein beliebiges der Aggregate $b_1 \Sigma x_1$, $b_{12} \Sigma x_1^2 x_2 \ldots$, so bemerken wir leicht, dass jede Gruppe wieder eine symmetrische Funktion der Wurzeln ist und dass die Aufgabe, Φ zu berechnen, auf die Aufgabe zurückgeführt ist, jede Gruppe zu berechnen. Man sieht auch leicht, dass alle Glieder einer Gruppe von demselben Grade sind, wenn man unter Grad die Summe der Exponenten der Veränderlichen versteht. So ist x_1 vom ersten Grade, x_1^2, $x_1 x_2$ sind vom zweiten, x_1^3, x_1^2, x_2, $x_1 x_2 x_3$ vom dritten Grade. Nennen wir endlich Gruppen, wie Σx_1, Σx_1^2, Σx_1^3, Σx_1^r, in welchen jedes Glied nur eine Veränderliche (Wurzel) enthält, einförmig, Gruppen wie $\Sigma x_1 x_2$, $\Sigma x_1^2 x_2$ $\Sigma x_1^3 x_2 \ldots$ zweiförmig, weil in jedem Gliede einer solchen Gruppe 2 verschiedene Veränderliche vorkommen u. s. f., so können wir jetzt die Aufgabe, Φ zu berechnen, als gelöst betrachten, wenn wir im Stande sind, eine $r$förmige Funktion der Wurzeln vom μten Grade zu bestimmen.

In § 131 wurde durch die Gleichung 5) die Aufgabe gelöst, eine einförmige Funktion der Wurzeln vom μten Grade, nämlich Σx_1^μ, vermittelst der Coefficienten der gegebenen Funktion zu bestimmen.

In § 133 behandelten wir die Aufgabe, eine $r$förmige Funktion der Wurzeln vom $r$ten Grade durch die Coefficienten auszudrücken.

Die Lösung des letzten Problems ist so einfach, dass wir es bei der Lösung der allgemeinen Aufgabe zu Grunde legen wollen.

§ 135.

Berechnung der ganzen homogenen symmetrischen Funktionen durch die Coefficienten.

Aus

$$-\frac{a_1}{a_0} = \Sigma x_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

folgt

$$\frac{a_1^2}{a_0^2} = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots x_1x_n + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n)$$

$$1)\ \frac{a_1^2}{a_0^2} = \Sigma x_1^2 \qquad\qquad + 2\,\Sigma x_1\,x_2$$

$$2)\ \frac{a_2}{a_0} = \quad \ldots\ldots\ldots \quad \Sigma x_1\,x_2\,.$$

Ferner hat man

$$-\frac{a_1^3}{a_0^3} = x_1^3 + \ldots + x_n^3 + 3(x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + \ldots + x_n^2x_{n-1}) + 6(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots)$$

$$3)\ -\frac{a_1^3}{a_0^3} = \Sigma x_1^3 + 3\,\Sigma x_1^2\,x_2 + 6\,\Sigma x_1\,x_2\,x_3$$

$$4)\ -\frac{a_1 a_2}{a_0^2} = \qquad \Sigma x_1^2\,x_2 + 3\,\Sigma x_1\,x_2\,x_3$$

$$5)\ -\frac{a_3}{a_0} = \qquad\qquad \Sigma x_1\,x_2\,x_3\,.$$

Das System 1) und 2) liefert die ein- und zweiförmigen Funktionen vom zweiten Grade, das System der Gleichungen 3), 4) und 5) die einförmigen, zweiförmigen und dreiförmigen Funktionen vom dritten Grade.

Auf dieselbe Weise lässt sich ein System von vier Gleichungen hinschreiben, welches die ein-, zwei-, drei- und vierförmigen Funktionen vom vierten Grade enthält u. s. f.

§ 136.

Symmetrische Funktionen und Potenzsummen der Wurzeln.

Ist, wie früher

$$s_\mu = x_1^\mu + x_2^\mu + x_3^\mu + \ldots + x_n^\mu$$
$$s_\nu = x_1^\nu + x_2^\nu + x_3^\nu + \ldots + x_n^\nu,$$

so wird

$$
\begin{aligned}
s_\mu \cdot s_\nu = x_1^{\mu+\nu} &+ x_1^\mu x_2^\nu + x_1^\mu x_3^\nu + \ldots + x_1^\mu x_n^\nu \\
&+ x_2^\mu x_1^\nu + x_2^{\mu+\nu} + x_2^\mu x_3^\nu + \ldots + x_2^\mu x_n^\nu \\
&+ x_3^\mu x_1^\nu + x_3^\mu x_2^\nu + x_3^{\mu+\nu} + \ldots + x_3^\mu x_n^\nu \\
&\vdots \\
&+ x_n^\mu x_1^\nu + x_n^\mu x_2^\nu + x_n^\mu x_3^\nu + \ldots + x_n^{\mu+\nu}.
\end{aligned}
$$

$$s_\mu \cdot s_\nu = s_{\mu+\nu} + \Sigma x_1^\mu x_2^\nu.$$

Daher ist

2) $$\Sigma x_1^\mu x_2^\nu = s_\mu \cdot s_\nu - s_{\mu+\nu},$$

so lange $\mu \lessgtr \nu$ ist.

Setzt man aber $\mu = \nu$, so treten auf der rechten Seite von 1) die Glieder $x_1^\mu x_2^\mu$; $x_1^\mu x_3^\mu \ldots$ zweimal auf, während nach unserer Definition $\Sigma x_1^\mu x_2^\mu$ diese nur einmal enthalten darf. Also ist

3) $$\Sigma x_1^\mu x_2^\mu = \frac{1}{2}[s_\mu^2 - s_{2\mu}].$$

Um die dreiförmige homogene symmetrische Funktion zu erhalten, rechnet man wie folgt:

$$s_\mu \,.\, s_\nu \,.\, s_\pi = s_\pi \,.\, s_{\mu+\nu} + s_\pi \Sigma x_1^\mu x_2^\nu;$$

$$
\begin{aligned}
s_\pi \Sigma x_1^\mu x_2^\nu &= \Sigma x_1^{\mu+\pi} x_2^\nu + \Sigma x_1^\mu x_2^{\nu+\pi} + \Sigma x_1^\mu x_2^\nu x_3^\pi \\
&= s_{\mu+\pi} \,.\, s_\nu + s_{\nu+\pi} \,.\, s_\mu - 2 s_{\mu+\nu+\pi} + \Sigma x_1^\mu x_2^\nu x_3^\pi.
\end{aligned}
$$

4) $$\Sigma x_1^\mu x_2^\nu x_3^\pi = s_\mu \,.\, s_\nu \,.\, s_\pi - s_\mu \,.\, s_{\nu+\pi} - s_\nu \,.\, s_{\mu+\pi} - s_\pi \,.\, s_{\mu+\nu} + 2 s_{\mu+\nu+\pi}.$$

Durch eine einfache Ueberlegung findet man, dass für $\mu = \nu$ die rechte Seite mit $\frac{1}{1 \cdot 2}$, für $\mu = \nu = \pi$ mit $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ zu multipliciren ist.

Es ist leicht ersichtlich, wie dieses Verfahren fortzusetzen ist.

§ 137.

Aufgaben.

1) Entwickele den Quotienten

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{3x^2 + 2x - 1}{5x^3 + 4x^2 - 2x + 1}$$

erstens in eine nach fallenden Potenzen fortschreitende Reihe,

zweitens in eine nach steigenden Potenzen von x fortschreitende Reihe, und wende hierbei das gewöhnliche Divisionsverfahren an.

2) Verfahre ebenso mit

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{x^2 - 1}{5x^3 + 2x + 1}.$$

3) Bilde aus dem Gleichungssystem in § 129 den Werth für

$$c_{n+r}.$$

4) Löse die Aufgaben 1) und 2) nach der Methode der unbestimmten Coefficienten.

5) Führe das Gleichungssystem 8) in § 129 weiter aus und gib im besonderen noch die Gleichung mit d_r in der Diagonale, wo $r < n$, und die Gleichungen für $d_{n+1}, d_{n+2} \ldots$ an.

6) Bilde

$$\sum_1^n{}_r \frac{1}{x_r^{\mu}} = \frac{1}{x_1^{\mu}} + \frac{1}{x_2^{\mu}} + \frac{1}{x_3^{\mu}} + \cdots + \frac{1}{x_n^{\mu}}.$$

Entwickele zu diesem Zwecke 2) in § 131 in eine nach steigenden Potenzen von x fortschreitende Reihe, ebenso die rechte Seite von 4) in § 130.

7) Es ist

$$f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 1$$

gegeben.

Es soll berechnet werden

1) $x_1 + x_2 + x_3$;
2) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$;
3) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$;
4) $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$.

8) Es ist gegeben

$$f(x) = x^5 + 9x^4 + 2x^2 - 7x + 1.$$

Bilde

$$\begin{aligned}\Sigma(x_1 - x_2)^4 = (x_1 - x_2)^4 + (x_1 - x_3)^4 + (x_1 - x_4)^4 + (x_1 - x_5)^4 \\ + (x_2 - x_3)^4 + (x_2 - x_4)^4 + (x_2 - x_5)^4 \\ + (x_3 - x_4)^4 + (x_3 - x_5)^4 \\ + (x_4 - x_5)^4.\end{aligned}$$

9) Bilde für dieselbe Funktion

$$\Sigma(x_1 - x_2)^2.$$

10) Bilde die einförmigen, zweiförmigen und dreiförmigen Funktionen vom ersten, zweiten, dritten und vierten Grade der Wurzeln der Funktion

$$a_0 x^5 + a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5.$$

11) Bilde die symmetrische Funktion

$$\Phi = 21 - 19\Sigma x_1 + 2\Sigma x_1^2 + \Sigma x_1^2 x_2$$

der Wurzeln der in der vorigen Aufgabe gegebenen Funktion.

12) Beweise, dass

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x - x_1} + \frac{f(x)}{x - x_2} + \cdots + \frac{f(x)}{x - x_n}$$

ist.

13) Entwickele jedes Glied der rechten Seite nach Potenzen von x, addire die Glieder mit gleichhohen Potenzen von x, vergleiche das Resultat mit

$$f'(x) = n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}$$

und leite so die linearen Gleichungen ab, aus denen die Potenzsummen der Wurzeln von $f(x)$ zu berechnen sind.

14) Beweise die Richtigkeit der Gleichung

$$\frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{n}{x} = -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{a_1 x^{n-1} + 2a_2 x^{n-2} + 3a_3 x^{n-3} + \cdots + n a_n}{a_0 x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \cdots + \frac{a_n}{x}}.$$

15) Entwickele den mit $-\frac{1}{x}$ multiplicirten Quotienten der rechten Seite der vorigen Gleichung nach fallenden Potenzen von x mit Hülfe der Methode der unbeständigen Coefficienten und leite dadurch den Werth von s_r ab.

16) In Formel 5) § 131 soll

$$a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_\mu = 1$$

gesetzt werden, und es soll bewiesen werden, dass unter dieser Voraussetzung

$$\sum_1^n x_r^\mu = -1$$

ist. Es ist dabei der Satz von der Subtraktion zweier Vertikalreihen der Determinante anzuwenden.

17) Beweise mit Hülfe dieses Satzes, dass in der Darstellung von s_μ durch die Coefficienten der gegebenen Funktion die Summe der numerischen Coefficienten gleich — 1 ist.

18) Wenn man die rechte Seite der Formel 5) in § 131 entwickelt, so haben die Glieder offenbar die Form

$$-\left(\frac{1}{a_0}\right)^\mu C \cdot a_0^{\lambda_0} \cdot a_1^{\lambda_1} \cdot a_2^{\lambda_2} \dots a_n^{\lambda_n}.$$

Es soll nun bewiesen werden, dass

$$1)\quad \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \mu$$

und

$$2)\quad 0\lambda_0 + 1\lambda_1 + 2\lambda_2 + \cdots + n\lambda_n = \mu$$

ist.

1) ist aus der Form der Determinante 5) in § 131 direkt abzuleiten. Zum Beweise von 2) sollen zunächst mit Hülfe von § 133 die Coefficienten derjenigen Funktion ermittelt werden, deren Wurzeln alle $b$mal so gross sind, als die Wurzeln der gegebenen Funktion.

1) gibt den Grad, 2) das Gewicht jenes Ausdruckes an.

19) Wenn

$$\sum_1^n \alpha_1^2 \alpha_2^5 \alpha_3^7$$

durch die Coefficienten der gegebenen Funktion ausgedrückt wird, von welchem Grade und welchem Gewichte ist dann die Entwickelung?

20) Wie oft kann das Produkt von der Form

$$s_{\mu_1+\mu_2+\mu_3}\, s_{r_1+r_2}\, s_0$$

gebildet werden?

21) Setzt man in der gegebenen Funktion $a_0 = 1$, so folgt aus § 135

$$\Sigma x_1^p x_2^q x_3^r x_4^s x_5^t \ldots = \Sigma C a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} a_3^{\lambda_3} a_4^{\lambda_4} \ldots,$$

wo C ein numerischer Coefficient ist. Setzen wir nun voraus, es sei r der grösste der Exponenten $p, q, r, s, t \ldots$, so soll bewiesen werden, dass

$$1)\quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \cdots = r;$$

$$2)\quad 1\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + 4\lambda_4 + \cdots = p + q + r + s + t + \cdots$$

ist.

Hierbei soll zur Nachweisung der ersten Gleichung jeder Coefficient a_i der gegebenen Gleichung als eine lineare Funktion der Wurzeln

$$a_i = M x_\mu + N$$

aufgefasst werden, um so die höchste Potenz einer beliebigen Wurzel nach Einsetzung in den Ausdruck

$$a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} a^{\lambda_3} a^{\lambda_4} \dots$$

festzustellen.

Um die zweite Gleichung zu beweisen, mag jede Wurzel mit a multiplicirt werden und dann mit Hülfe von § 133 die Aenderung der Coefficienten $a_1, a_2 \dots a_n$ gesucht werden.

Vgl. diese Aufgabe mit der 18ten.

22) Verificire unter der Voraussetzung $a_0 = 1$ die Gleichungen

$$\begin{aligned}
a_4 &= \Sigma x_1 x_2 x_3 x_4 \\
a_3 a_1 &= \Sigma x_1^2 x_2 x_3 + 4 \Sigma x_1 x_2 x_3 x_4 \\
a_2^2 &= \Sigma x_1^2 x_2^2 + 2 \Sigma x_1^2 x_2 x_3 + 6 \Sigma x_1 x_2 x_3 x_4 \\
a_2 a_1^2 &= \Sigma x_1^3 x_2 + 2 \Sigma x_1^2 x_2^2 + 5 \Sigma x_1^2 x_2 x_3 + 12 \Sigma x_1 x_2 x_3 x_4 \\
a_1^4 &= \Sigma x_1^4 + 4 \Sigma x_1^3 x_2 + 6 \Sigma x_1^2 x_2^2 + 12 \Sigma x_1^2 x_2 x_3 + 24 \Sigma x_1 x_2 x_3 x_4
\end{aligned}$$

und berechne aus ihnen die fünf darin enthaltenen symmetrischen Funktionen der Wurzeln.

23) Dividire

$$a_0 x^5 + a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5 = f(x)$$

durch $x - b$ und überzeuge dich davon, dass der Quotient eine ganze Funktion von x ist, der Rest aber dargestellt wird durch

$$f(b) = a_0 b^5 + a_1 b^4 + a_2 b^3 + a_3 b^2 + a_4 b + a_5.$$

24) Führe dieselbe Operation für

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n$$

aus und beweise so, dass

$$f(x) = \Phi(x)(x - b) + f(b)$$

ist, wo $\Phi(x)$ eine ganze Funktion bedeutet.

25) Mit Benutzung dieses Resultates und der Gleichung 4) in § 130 soll die Richtigkeit der Gleichung

$$\frac{f'(x)\cdot\varphi(x)}{f(x)}=F(x)+\frac{1}{x}[\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\varphi(x_3)+\dots+\varphi(x_n)]+\dots$$

bewiesen werden.

26) Wie kann man demnach die symmetrische Funktion $\Sigma\varphi(x_1)$ der Wurzeln der Funktion $f(x)$ berechnen?

Siebenter Abschnitt.

Die Elimination.

§ 138.

Die dialytische Methode.

Es mögen die beiden Gleichungen

1) $$a_0 x^2 + a_1 x + a_2 = 0$$

und

$$a'_0 x^2 + a'_1 x + a'_2 = 0$$

gegeben sein. Gibt es einen oder mehrere Werthe von x, welche beide Gleichungen gleichzeitig befriedigen, so kann man diese Gleichungen als zusammenbestehend betrachten und die Aufgabe stellen, die Unbekannte x aus ihnen zu eliminiren.

Zu diesem Zwecke multipliciren wir die erste und zweite Gleichung mit x und erhalten dadurch das folgende System

2) $$\begin{aligned} a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x \qquad &= 0\\ a_0 x^2 + a_1 x + a_2 &= 0\\ a'_0 x^3 + a'_1 x^2 + a'_2 x \qquad &= 0\\ a'_0 x^2 + a'_1 x + a'_2 &= 0 \end{aligned}$$

aus vier Gleichungen mit den drei Unbekannten x^3, x^2, x. Dieses System kann nach § 85 nur bestehen, wenn

3) $$\Delta = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0\\ 0 & a_0 & a_1 & a_2\\ a'_0 & a'_1 & a'_2 & 0\\ 0 & a'_0 & a'_1 & a'_2 \end{vmatrix} = 0$$

ist.

Die Determinante Δ heisst die Eliminante oder Resultante des Systems 1) und enthält die Bedingung, unter welcher dasselbe durch dieselben Werthe von x befriedigt wird; sie ist ferner eine Funktion der Coefficienten der beiden gegebenen Gleichungen.

Diese beiden Eigenschaften fassen wir nunmehr als die Definition der Resultante auf und stellen uns die Aufgabe, dieselbe allgemein für die Gleichungen

$$4)\qquad \begin{aligned} a^0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n &= 0 \\ a'_0 x^r + a'_1 x^{r-1} + a'_2 x^{r-2} + \dots + a'_r &= 0 \end{aligned}$$

zu bilden.

Wir multipliciren die erste Gleichung der Reihe nach mit x^{r-1}, $x^{r-2} \dots x$, die zweite mit x^{n-1}, $x^{n-2} \dots x$, wodurch das System

$$5)\qquad \begin{aligned} a_0 x^{n+r-1} + a_1 x^{n+r-2} + a_2 x^{n+r-3} + \dots + a_n x^{r-1} &= 0 \\ a_0 x^{n+r-2} + a_1 x^{n+r-3} + \dots\dots + a_n x^{r-2} &= 0 \\ &\vdots \\ a_0 x^n + a_1 x^{n-1} \dots\dots\dots + a_n &= 0; \\ a'_0 x^{n+r-1} + a'_1 x^{n+r-2} + \dots + a'_r x^{n-1} &= 0 \\ a'_0 x^{n+r-1} + \dots\dots + a'_r x^{n-2} &= 0 \\ &\vdots \\ a'_0 x^r + a'_1 x^{r-1} + \dots\dots + a'_r &= 0 \end{aligned}$$

mit $n + r - 1$ Unbekannten und $n + r$ Gleichungen entsteht. Dieses System liefert daher

$$6)\qquad R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \dots\dots a_n & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \dots a_{n-1} & a_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 \; a_2 \;\dots & \dots & a_n & 0 \\ & \vdots & & & \vdots & & \\ a'_0 & a'_1 & a'_2 & \dots a'_r & 0 & 0 \dots\dots & \\ 0 & a'_0 & a'_1 & a'_2 \; a'_3 \; a'_r & & 0 \dots\dots & \\ 0 & 0 & a'_0 & a'_1 \; a'_2 \;\dots & & a'_r \dots\dots & \\ . & . & . & . \; a'_0 \; a'_1 & . & . & . \; a'_r \end{vmatrix} = 0$$

als Bedingung für die Existenz gleicher Wurzelwerthe der beiden Gleichungen 4). r Zeilen der Determinante R sind gebildet von den Coefficienten $a_0, a_1 \dots a_n$ der ersten Gleichung, n Zeilen von den Coefficienten $a'_0, a'_1, a'_2 \dots a'_r$ der zweiten.

§ 139.

Folgerungen.

1) Aus der Form 6) der Resultante ergibt sich, dass dieselbe homogen in Bezug auf die Coefficienten $a_0, a_1 \dots a_n$, und zwar vom $r$ten Grade ist, da jedes Glied der Entwickelung von R je ein Element aus den ersten r Zeilen enthalten muss. Aus ähnlichen Gründen ist R homogen und vom Grade n in Bezug auf die Coefficienten $a'_0, a'_1 \dots a'_r$.

Endlich ist R homogen und vom Grade $n + r$ in Bezug auf die Coefficienten beider gegebenen Gleichungen.

2) Wir denken die Resultante entwickelt. Ein Glied der Entwickelung enthält aus jeder der r ersten Zeilen das Element a_n und aus jeder der n letzten Zeilen das Element a'_0. Es hat also den Werth

$$\pm a_n^r \, . \, a'^n_0 .$$

Die Summe der Produkte $rn + n0$ aus den Exponenten und den zugehörigen Indices ist gleich rn.

Diese Produktensumme nennt man das Gewicht des Gliedes $\pm a_n^r \, . \, a'^n_0$.

Nehmen wir nun für ein Element a_n der ersten Gruppe ein anderes Element a_m derselben Gruppe, so verschwindet nur dasjenige Glied in der Entwickelung von R nicht, welches entsteht, wenn man aus der $m$ten Zeile der zweiten Gruppe für a'_0 das unter a_n stehende Element a'_{n-m} nimmt. Dieses Glied ist demnach

$$\pm a_n^{r-1} \, . \, a_m \, . \, a'^{n-1}_0 \, . \, a'_{n-m}$$

mit dem Gewichte

$$(r-1)\,n + 1 \, . \, m + (n-1) \, . \, 0 + (n-m) = n \, . \, r \, .$$

Dasselbe lässt sich von jedem Gliede der Resultante zeigen; daher können wir sie selbst von dem Gewichte $n \, . \, r$ nennen.

3) Diese Eigenschaften dienen zur bequemen Berechnung der Resultante selbst.

§ 140.

Die Resultante als Funktion der Wurzeln.

Es seien wieder

$$1) \qquad f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

und

2) $$\varphi(x) = a'_0 x^{r-1} + a'_1 x^{r-1} + \cdots + a'_r = 0$$

die beiden gegebenen Gleichungen, wovon die erste die Wurzeln $x_1, x_2 \ldots x_n$, die zweite die Wurzeln $x'_1, x'_2 \ldots x'_r$ hat. Dann ist

3) $$f(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n);$$

4) $$\varphi(x) = a'_0(x - x'_1)(x - x'_2) \ldots (x - x'_r).$$

Ist nun eine der Wurzeln $x'_1, x'_2 \ldots x'_r$ z. B. x'_μ eine Wurzel der ersten Gleichung, so ist

5) $$f(x'_\mu) = a_0(x'_\mu - x_1)(x'_\mu - x_2) \ldots (x'_\mu - x_n) = 0,$$

und umgekehrt; wird diese Bedingung erfüllt, so ist x'_μ eine gemeinschaftliche Wurzel der Gleichungen 1) und 2).

Haben demnach die Gleichungen 1) und 2) eine Wurzel gemeinschaftlich, so muss

6) $$\begin{aligned} f(x'_1)\cdot f(x'_2)\cdots f(x'_r) = a_0^r & (x'_1 - x_1)(x'_1 - x_2)\ldots(x'_1 - x_n)\times \\ & (x'_2 - x_1)(x'_2 - x_2)\ldots(x'_2 - x_n)\times \\ & \vdots \\ & (x'_r - x_1)(x'_r - x_2)\ldots(x'_r - x_n) \\ & = 0 \end{aligned}$$

sein. Da der Faktor a_0 von 0 verschieden vorausgesetzt werden kann, so geht die Bedingung 6) in

7) $$\begin{aligned} & (x'_1 - x_1)(x'_1 - x_2)(x'_1 - x_3)\ldots(x'_1 - x_n)\times \\ & (x'_2 - x_1)(x'_2 - x_2)(x'_3 - x_3)\ldots(x'_2 - x_n)\times \\ & \vdots \\ & (x'_r - x_1)(x'_r - x_2)(x'_r - x_3)\ldots(x'_r - x_n) = 0 \end{aligned}$$

über. Die linke Seite ist eine symmetrische Funktion der Wurzeln $x_1, x_2 \ldots x_n$ der Gleichung

$$f(x) = 0$$

und eine symmetrische Funktion der Wurzeln der Gleichung

$$\varphi(x) = 0.$$

Daher kann das Produkt dieser Wurzeldifferenzen durch die Coefficienten der gegebenen Gleichungen ausgedrückt werden und das Produkt selbst ist demnach die Resultante der beiden Gleichungen.

§ 141.

Zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten.

Jede der beiden gegebenen Gleichungen

$$1) \qquad f(x, y) = 0$$

und

$$2) \qquad \varphi(x, y) = 0$$

mag in Bezug auf x und y von demselben Grade sein und zwar $f(x, y)$ vom Grade n, $\varphi(x, y)$ vom Grade r. Ordnen wir beide Funktionen f und φ nach fallenden Potenzen von x, so gehen die Gleichungen 1) und 2) über in

$$3) \quad f(x, y) = f_0 x^n + f_1 x^{n-1} + f_2 x^{n-2} + \cdots + f_n = 0;$$

$$4) \quad \varphi(x, y) = \varphi_0 x^r + \varphi_1 x^{r-1} + \varphi_2 x^{r-2} + \cdots + \varphi_r = 0.$$

Hierin sind f_0 und φ_0 constante, f_1 und φ_1 Funktionen ersten Grades von y, f_2 und φ_2 Funktionen des zweiten Grades von y, f_n und φ_r Funktionen des $n$ten resp. $r$ten Grades von y.

Haben die beiden Gleichungen für irgend ein y eine gemeinschaftliche Wurzel x, so muss nach § 139

$$5) \qquad R = \begin{vmatrix} f_0, & f_1, & f_2, & \ldots & f_n, & 0, & 0, \ldots \\ 0, & f_0, & f_1, & \ldots\ldots & f_n, & 0, \ldots \\ & 0, & f_0, & f_1, & \ldots & f_{n-1}, & f_n, \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_0, & \varphi_1, & \varphi_2, & \varphi_3, & \ldots & \varphi_r, & 0, \ldots \\ 0, & \varphi_0, & \varphi_1, & \varphi_2, & \ldots & \varphi_{r-1} & \varphi_r \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = 0$$

sein. Jedes Glied der Entwickelung von R hat das Gewicht nr. Also ist auch

$$R = 0$$

eine Gleichung vom Grade nr in Bezug auf y mit den nr Wurzeln $y_1, y_2, y_3 \ldots y_{nr}$.

Da für jeden dieser nr Werthe von y die Resultante von 3) und 4) verschwindet, so gehört zu jedem dieser nr Werthe ein Werth von x, der die beiden gegebenen Gleichungen befriedigt.

Es gibt demnach nr Werthsysteme von x und y, die die beiden Bedingungen 1) und 2) erfüllen.

Achter Abschnitt.

Die Discriminante.

§ 142.

Die Discriminanten als Resultanten.

Wir haben in § 130 gezeigt, dass die erste Ableitung der Funktion

1) $$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n$$

dargestellt wird durch

2) $$f'(x) = n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + (n-2) a_2 x^{n-3} + \cdots + a_{n-1}.$$

Andererseits erhielten wir für diese Funktionen die Ausdrücke

3) $$f(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_n);$$

4) $$f'(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n-1}) + a_0(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n-2})(x - x_n) + \cdots + a_0(x - x_2(x - x_3) \cdots (x - x_n),$$

wo $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ die Wurzeln der Funktion 1) sind. Unter der Voraussetzung der Gleichheit zweier oder mehrerer dieser Wurzeln verschwindet jedes Glied der rechten Seite von 4), wenn man diese Werthe in 4) für x einsetzt, also ist dieser Werth von x auch eine Wurzel der Funktion $f'(x)$.

Umgekehrt: haben $f(x)$ und $f'(x)$ eine gemeinschaftliche Wurzel, so kommt dieselbe in $f(x)$ mindestens zweimal vor. Nach den Untersuchungen von § 138—140 haben die Funktionen $f(x)$ und $f'(x)$ nur eine gemeinsame Wurzel, wenn die Resultante derselben verschwindet. Demnach zeigen unsere jetzigen Bemerkungen, dass die Resultante die Bedingungen enthält, unter denen zwei oder mehrere Wurzeln der gegebenen Gleichung gleich sind.

Diese Resultante heisst die Discriminante oder auch Determinante [siehe homogene Funktionen zweiten Grades] der Funktion $\frac{1}{a_0} f(x)$.

§ 143.

Bildung der Discriminante.

Wenden wir § 138, 6) auf 1) und 2) des vorigen § an, so erhalten wir für die Discriminante den Werth

$$1)\quad \mathfrak{D} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \dots & a_n & 0 & 0 & & \\ 0 & a_0 & a_1 \dots & a_{n-1} & a_n & 0 & & \\ 0 & 0 & a_0 \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & & \\ \dots & & & & & & & \\ na_0 & (n-1)a_1 & (n-2)a_2 \dots & a_{n-1} & 0 & 0 & 0 \dots \\ 0 & na_0 & (n-1)a_2 \dots & \dots & a_{n-1} & 0 & 0 \dots \\ 0 & 0 & na_0 \dots & \dots & \dots & a_{n-1} & 0 \dots \end{vmatrix}$$

In dieser Discriminante gehören $(n-1)$ Zeilen zur ersten Gruppe, n Horizontalzeilen zur zweiten. In derselben multipliciren wir jede Horizontalreihe der ersten Gruppe mit n und subtrahiren sie von der entsprechenden Zeile der zweiten. Mit Beachtung der Faktoren -1 wird

$$2)\quad \mathfrak{D} = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots a_n & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots a_{n-1} & a_n & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & \dots a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ \dots & & & & & \\ 0 & a_1 & 2a_2 & 3a_3 \dots na_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 2a_2 \dots\dots na_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \dots\dots\dots & na_n & 0 \\ \dots & & & & & \\ & & na_0 & (n-1)a_1 \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

$$3)\quad \mathfrak{D} = (-1)^{n-1} a_0 \times$$

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \dots & a_{n-1} & a_n & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 0 \\ \dots & & & & & & \\ a_1 & 2a_2 & 3a_3 \dots & na_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 2a_2 \dots & \dots & na_n & 0 & 0 \\ \dots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \dots & \dots & (n-1)a_{n-1} & na_n \\ 0 & 0 & 0 & na_0 & (n-1)a_1 & \dots & a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Hier gehören $n - 2$ Zeilen zur ersten und n Zeilen zur zweiten Gruppe.

Da wir die Discriminante als die Resultante der Funktion und ihrer ersten Ableitung definirt haben, so können wir dieselben nach § 140 bilden, wie folgt:

Die Wurzeln $x_1, x_2 \dots x_n$ der Funktion setzen wir der Reihe nach in § 142, 4) ein. Für jede dieser Wurzeln verschwinden alle Glieder der rechten Seite mit Ausnahme eines einzigen, so dass man hat

$$\begin{aligned}
f'(x_1) &= a_0(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \dots (x_1 - x_n) \\
f'(x_2) &= a_0(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \dots (x_2 - x_n) \\
f'(x_3) &= a_0(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4) \dots (x_3 - x_n) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
f'(x_n) &= a_0(x_n - x_1)(x_3 - x_2)(x_n - x_3) \dots (x_n - x_{n-1}).
\end{aligned}$$

Wechseln wir noch in der zweiten dieser Gleichungen die Vorzeichen von $x_2 - x_1$, in der dritten diejenigen von $x_3 - x_1$ und $x_3 - x_2$ u. s. f., so sind im Ganzen

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

Zeichenwechsel entstanden. Demnach ist

$$\begin{aligned}
4) \qquad & f'(x_1) \cdot f'(x_2) \dots f'(x_n) \\
&= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0^n (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_1 - x_4)^2 \dots (x_1 - x_n)^2 \\
&\qquad \times (x_2 - x_3)^2 (x_2 - x_4)^2 \dots (x_2 - x_n)^2 \\
&\qquad \times (x_3 - x_4)^2 \dots (x_3 - x_n)^2 \\
&\qquad \vdots \\
&\qquad \times (x_{n-1} - x_n)^2.
\end{aligned}$$

Die rechte Seite zeigt, dass die Discriminante verschwindet und nur verschwindet, wenn $f(x)$ gleiche Wurzeln hat.

Vertauscht man x_μ mit x_r, so ändert die rechte Seite von 4) ihren Werth nicht, daher ist die Discriminante eine symmetrische Funktion der Wurzeln.

Endlich ist sie eine homogene Funktion der Wurzeln. Setzt man

$$\begin{aligned}
s_0 &= x_1^0 + x_2^0 + \cdots + x_n^0 = n \\
s_1 &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\
s_2 &= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2
\end{aligned}$$

u. s. f., so geht mit Anwendung von § 58, Beispiel 23 und 24, die rechte Seite von 4) über in

$$5)\qquad \mathfrak{D} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0^n \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \dots & s_{n+1} \\ \vdots \end{vmatrix},$$

womit die Discriminante als eine Funktion der Potenzsummen der Wurzeln dargestellt ist.

§ 144.

Die Discriminante des Produktes zweier Funktionen.

Quadrirt man die rechte Seite der Gleichung 6) in § 140, so erhält man die Quadrate aller Differenzen aus je einer Wurzel der Funktion $\varphi(x)$ und einer Wurzel der Funktion $f(x)$.

Die Discriminante der Funktion $f(x)$ ist das Produkt der Quadrate aller Differenzen aus je zwei Wurzeln dieser Funktion in einen Faktor. Die Discriminante der Funktion $\varphi(x)$ enthält die Quadrate aller Differenzen aus je zwei Wurzeln der Funktion $\varphi(x)$. Das Produkt aus dem Quadrate jener Resultante und diesen beiden Discriminanten enthält demnach alle Quadrate jener Differenzen aus je zwei der Wurzeln von $f(x)$ und $\varphi(x)$. Diese Wurzeln sind die Wurzeln der Gleichung

$$f(x) \cdot \varphi(x) = 0.$$

Demnach stellt jenes Produkt, abgesehen vom Vorzeichen, die Discriminante der Funktion $f(x) \cdot \varphi(x)$ dar. Somit gewinnen wir den Satz:

Dem absoluten Werthe nach ist die Discriminante des Produktes zweier Funktionen gleich dem Produkte ihrer Discriminante in das Quadrat ihrer Resultante.

§ 145.

Aufgaben.

1) Bilde die Resultante der beiden Gleichungen

$$5x^4 - 3x^2 + 1 = 0$$
$$5x^3 + 2x^2 + 3x - 1 = 0.$$

2) Bilde die Resultante der Gleichungen

$$a_0 x^2 + a_1 x + a_2 = 0$$

und

$$a'_0 x^3 + a'_1 x^2 + a'_2 x + a'_3 = 0.$$

3) Bestimme die gemeinsamen Wurzelsysteme der Gleichungen

$$a_{11} x^2 + 2a_{12} xy + a_{22} y^2 + a_1 x + a_2 y + a_0 = 0$$
$$a'_{11} x^2 + 2a'_{12} xy + a'_{22} y^2 + a'_1 x + a'_2 y + a'_0 = 0.$$

4) Mache in § 140 die beiden Gleichungen durch Einführung des Verhältnisses $\frac{x}{\xi}$ für x homogen und führe die Untersuchung für diese Form weiter.

5) Bilde die Discriminante der Funktion

$$a_0 x^2 + a_1 x + a_2.$$

6) Bilde die Discriminante der Funktion

$$a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3.$$

7) Bilde die Discriminante der Funktion

$$x^n - 1.$$

8) Bilde diejenige der Funktion

$$x^n + 1.$$

9) Stelle die Discriminante der Funktion

$$a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3$$

als eine Funktion der Potenzsummen der Wurzeln dar.

10) Berechne die Discriminante von

$$(a_0 x^3 + a_1 x^2 - a_2 x + a_3)(a'_0 x^2 + a'_1 x + a'_2).$$

11) Gib die Discriminante von

$$(x - x_1)(a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n)$$

an.

Neunter Abschnitt.

Kanonische Formen.

§ 146.

Reduktion der binären Form von ungeradem Grade.

Die gegebene Form sei

$$1)\qquad f(x_1, x_2) = a_0 x_1^{2n+1} + (2n+1)_1 a_1 x_1^{2n} x_2 + (2n+1)_2 a_2 x_1^{2n-1} x_2^2 + \cdots + (2n+1)_{2n+1} a_{2n+1} x_2^{2n+1},$$

in welcher, wie früher $(2n+1)_1$, $(2n+1)_2$ etc. Binomialcoefficienten bedeuten, die wir zur Vereinfachung der Rechnung hinzufügen. Wir stellen uns die Aufgabe, diese Form in die andere

$$2)\qquad f(x_1,x_2) = b_0(x_1 + \lambda_0 x_2)^{2n+1} + b_1(x_1 + \lambda_1 x_2)^{2n+1} + \cdots + b_n(x_1 + \lambda_n x_2)^{2n+1}$$

überzuführen, was möglich sein muss, weil die Form 2) $2n+2$ Coefficienten enthält, wie 1). 2) heisst die kanonische Form.

Entwickeln wir die einzelnen Glieder der rechten Seite von 2) nach dem binomischen Lehrsatze, addiren die in Bezug auf x_1 und x_2 gleichnamigen Glieder und vergleichen die entsprechenden Coefficienten in 2) und 1), so ergibt sich das folgende Gleichungssystem:

$$3)\quad \begin{cases} b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n \cdots = a_0 \\ b_0\lambda_0 + b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 + b_3\lambda_3 + \cdots + b_n\lambda_n \cdots = a_1 \\ b_0\lambda_0^2 + b_1\lambda_1^2 + b_2\lambda_2^2 + b_3\lambda_3^2 + \cdots + b_n\lambda_n^2 \cdots = a_2 \\ \vdots \\ b_0\lambda_0^{2n+1} + b_1\lambda_1^{2n+1} + b_2\lambda_2^{2n+1} + b_3\lambda_3^{2n+1} + \cdots + b_n\lambda_n^{2n+1} \cdots = a_{2n+1} \end{cases}$$

aus $(2n+2)$ Gleichungen mit den $(2n+2)$ Unbekannten $b_0, b_1 \ldots b_n, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$.

Um dasselbe aufzulösen, setzen wir

$$
4)\begin{cases}
\varDelta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_0^2 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_0^n & \lambda_1^n & \dots & \lambda_n^n \end{vmatrix}; \quad
\varDelta_0 = \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ a_2 & \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & \lambda_1^n & \lambda_2^n & \dots & \lambda_n^n \end{vmatrix}; \\
\varDelta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & \dots & 1 \\ a_2 & \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ a_3 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n+1} & \lambda_1^n & \dots & \lambda_n^n \end{vmatrix}; \quad
\varDelta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & 1 & \dots & 1 \\ a_3 & \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ a_4 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n+2} & \lambda_1^n & \dots & \lambda_n^n \end{vmatrix};
\end{cases}
$$

u. s. f.

Entwickelt man jede dieser Determinanten nach den Elementen der ersten Vertikalreihe, so wird

$$
5)\begin{cases}
\varDelta = A_0 1 + A_1 \lambda_0 + A_2 \lambda_0^2 + \cdots + A_n \lambda_0^n \\
\varDelta_0 = A_0 a_0 + A_1 a_1 + A_2 a_2 + \cdots + A_n a_n \\
\varDelta_1 = A_0 a_1 + A_1 a_2 + A_2 a_3 + \cdots + A_n a_{n+1} \\
\varDelta_2 = A_0 a_2 + A_1 a_3 + A_2 a_4 + \cdots + A_n a_{n+2}
\end{cases}
$$

u. s. f.

Mit diesen Bemerkungen leiten wir aus dem Systeme 3) neue Systeme auf folgende Weise ab: In den ersten $(n+1)$ Gleichungen fassen wir $b_0, b_1, b_2 \dots b_n$ als Unbekannte auf und lösen auf; in den Gleichungen 2 bis $(n+2)$ betrachten wir $b_0\lambda_0, b_1\lambda_1, b_2\lambda_2 \dots b_n\lambda_n$ als die Unbekannten; in den Gleichungen 3 bis $(n+3)$ sollen $b_0\lambda_0^2, b_1\lambda_1^2, \dots b_n\lambda_n^2$ die Unbekannten sein u. s. f. — Hierdurch ergibt sich z. B. das System

$$
6)\begin{cases}
-\varDelta b_0 + A_0 a_0 + A_1 a_1 + A_2 a_2 + \cdots + A_n a_n = 0 \\
-\varDelta b_0 \lambda_0 + A_0 a_1 + A_1 a_2 + A_2 a_3 + \cdots + A_n a_{n+1} = 0 \\
\vdots \\
-\varDelta b_0 \lambda_0^{n+1} + A_0 a_{n+1} + A_1 a_{n+2} + A_2 a_{n+3} + \cdots + A_n a_{2n+1} = 0.
\end{cases}
$$

In diesem Systeme sehen wir die $(n+2)$ Grössen $\varDelta b_0, A_0, A_1, A_2 \dots A_n$ als Unbekannte an. Dann muss nach § 91, 3

$$7)\qquad \begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_1 & \dots a_n \\ \lambda_0 & a_1 & a_2 & \dots a_{n+1} \\ \lambda_0^2 & a_2 & a_3 & \dots a_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_0^{n+1} & a_{n+1} & a_{n+2} & \dots a_{2n+1} \end{vmatrix} = 0$$

sein.

Ebensolche Gleichungen erhält man für $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$. Daher sind die Grössen $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$ die Wurzeln dieser Gleichung.

Hat man die Wurzelwerthe gefunden, so setzt man dieselben in die ersten $(n+1)$ Gleichungen des Systems 3) ein und löst nach $b_0, b_1, b_2 \dots b_n$ auf, so dass das Problem auf das andere, eine Gleichung (7) vom Grade $(n+1)$ aufzulösen, zurückgeführt ist.

Daher verlangt die binäre Form 3ten Grades die Auflösung einer quadratischen, die binäre Form 5ten Grades die Auflösung einer kubischen Gleichung.

§ 147.

Reduktion der binären Formen von geradem Grade.

Ist

$$1)\quad f(x_1, x_2) = a_0 x_1^{2n} + (2n)_1 a_1 x_1^{2n-1} x_2 + (2n)_2 a_2 x_1^{2n-2} x_2^2 + \dots + a_{2n} x_2^{2n}$$

so setze man

$$2)\quad f(x_1, x_2) = b_0(x_1 + \lambda_0 x_2)^{2n} + b_1(x_1 + \lambda_1 x_2)^{2n} + \dots + b_n(x_1 + \lambda_n x_2)^{2n}$$

und bilde so, wie im vorigen §, das System

$$3)\quad \begin{cases} -\Delta b_0 + A_0 a_0 + A_1 a_1 + A_2 a_2 + \dots + A_n a_n = 0 \\ -\Delta b_0 \lambda_0 + A_0 a_1 + A_1 a_2 + A_2 a_3 + \dots + A_n a_{n+1} = 0 \\ -\Delta b_0 \lambda_0^2 + A_0 a_2 + A_1 a_3 + A_2 a_4 + \dots + A_n a_{n+2} = 0 \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ -\Delta b_0 \lambda_0^n + A_0 a_n + A_1 a_{n+1} + A_2 a_{n+2} + \dots + A_n a_{2n} = 0, \end{cases}$$

aus $(n+1)$ Gleichungen mit den $(n+2)$ Unbekannten $-\Delta b_0, A_0, A_1 \dots A_n$. Da in diesem Systeme eine Unbekannte mehr als Gleichungen vorkommt, so kann man einer

Unbekannten einen willkürlichen Werth beilegen. Wir können also

$$4)\qquad b_0 = 0$$

wählen. Hiermit ergibt sich durch Anwendung von 3) in § 91 auf dieses System die Gleichung

$$5)\qquad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots a_{n+1} \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots a_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & a_{n+1} & a_{n+2} & \dots a_{2n} \end{vmatrix} = 0$$

und gleichzeitig

$$6)\qquad f(x_1 x_2) = b_1(x_1 + \lambda_1 x_2)^{2n} + b_2(x_1 + \lambda_2 x_2)^{2n} + \cdots + b_n(x_1 + \lambda_n x_2)^{2n}.$$

Dieses Resultat lässt sich als Satz aussprechen, wie folgt:

Erfüllen die Coefficienten einer binären Form von geradem Grade die Bedingung 5), so lässt sich dieselbe in eine Summe von n Potenzen mit dem Exponenten $2n$ zerlegen.

Ist aber die Determinante 5) von Null verschieden, so lässt sich die binäre Form vom Grade $2n$ in eine Summe aus $(n+1)$ Potenzen auf unendlich viele Arten zerlegen.

§ 148.

Reduktion der biquadratischen binären Form.

Ist die Bedingung 5) des vorigen § nicht erfüllt, so fügt man zu der Summe aus n Potenzen vom $2n$ten Grade noch ein Glied

$$+ k(x_1 + \lambda_1 x_2)^n (x_1 + \lambda_2 x_2)^n \dots (x_1 + \lambda_n x_2)^n$$

hinzu, um die kanonische Form zu erhalten. Diese Reduktion ist aber bis jetzt nur für die Formen vom 4ten, 6ten und 8ten Grade gelungen. Wir führen sie hier für die erste derselben durch.

Die gegebene Form sei

$$1)\quad f(x_1, x_2) = a_0 x_1^4 + 4a_1 x_1^3 x_2 + 6a_2 x_1^2 x_2^2 + 4a_3 x_1 x_2^3 + a_4 x_2^4,$$

welche auf die kanonische Form

$$2)\quad b_0(x_1 + \lambda_0 x_2)^4 + b_1(x_1 + \lambda_1 x_2)^4 + 6c(x_1 + \lambda_0 x_2)^2 (x_1 + \lambda_1 x_2)^2$$

gebracht werden soll.

Durch Ausführung in 2) und Vergleichung der entsprechenden Coefficienten in 2) und 1) erhält man das Gleichungssystem

$$3)\quad \begin{cases} b_0 + b_1 + 6c = a_0 \\ b_0\lambda_0 + b_1\lambda_1 + 3c(\lambda_0 + \lambda_1) = a_1 \\ b_0\lambda_0^2 + b_1\lambda_1^2 + c(\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + 4\lambda_0\lambda_1) = a_2 \\ b_0\lambda_0^3 + b_1\lambda_1^3 + 3c\lambda_0\lambda_1(\lambda_0 + \lambda_1) = a_3 \\ b_0\lambda_0^4 + b_1\lambda_1^4 + 6c\lambda_0^2\lambda_1^2 = a_4. \end{cases}$$

Setzt man hierin

$$4)\quad \lambda_0 + \lambda_1 = A; \quad \lambda_0\lambda_1 = B,$$

so sind offenbar λ_0 und λ_1 die Wurzeln der Gleichung

$$5)\quad y^2 - Ay + B = 0,$$

während 3) übergeht in

$$6)\quad \begin{cases} b_0 + b_1 + (6c - a_0) = 0 \\ b_0\lambda_0 + b_1\lambda_1 + 3c\,(A - a_1) = 0 \\ b_0\lambda_0^2 + b_1\lambda_1^2 + c(A^2 + 2B) - a_2 = 0 \\ b_0\lambda_0^3 + b_1\lambda_1^3 + 3cA\,.\,B - a_3 = 0 \\ b_0\lambda_0^4 + b_1\lambda_1^4 + 6cB^2 - a_4 = 0. \end{cases}$$

Wir eliminiren aus der ersten, zweiten und dritten dieser Gleichungen b_0 und b_1, aus der zweiten, dritten und vierten $b_0\lambda_0$ und $b_1\lambda_1$, aus der dritten, vierten und fünften $b_0\lambda_0^2$ und $b_1\lambda_1^2$, wodurch wir die drei Gleichungen

$$7)\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6c-a_0 \\ \lambda_0 & \lambda_1 & 3cA-a_1 \\ \lambda_0^2 & \lambda_1^2 & c(A^2+2B)-a_2 \end{vmatrix} = (\lambda_0-\lambda_1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 6c-a_0 \\ 0 & \lambda_1 & 3cA-a_1 \\ A & \lambda_0^2 & c(A^2+2B)-a_2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda_0 - \lambda_1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 6c - a_0 \\ 1 & 0 & 3cA - a_1 \\ A & -B & c(A^2 + 2B) - a_2 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$7')\quad \begin{vmatrix} 0; & 1; & 6c - a_0 \\ 1; & 0; & 3cA - a_1 \\ A; & -B; & c(A^2 + 2B) - a_2 \end{vmatrix} = 0;$$

8)
$$\begin{vmatrix} 0; & 1; & 3cA - a_1 \\ 1; & 0; & c(A^2 + 2B) - a_2 \\ A; & -B; & 3cAB - a_3 \end{vmatrix} = 0;$$

9)
$$\begin{vmatrix} 0; & 1; & c(A^2 + 2B) - a_2 \\ 1; & 0; & 3cAB - a_3 \\ A; & -B; & 6cB^2 - a_4 \end{vmatrix} = 0$$

erhalten. Hierbei sind in 7) die Determinanten auf folgende Art umgeformt: Es wurde die zweite Vertikalreihe von der ersten subtrahirt und der gleiche Faktor herausgeschrieben, dann wurde die mit λ_1 multiplicirte erste Vertikalreihe von der zweiten subtrahirt unter Berücksichtigung der Werthe von A und B.

Durch Ausrechnung der Determinanten 7′, 8, 9 erhält man das System

10)
$$\begin{cases} a_0 B - a_1 A + a_2 - c(8B - 2A^2) = 0 \\ a_1 B - a_2 A + a_3 - cA(4B - A^2) = 0 \\ a_2 B - a_3 A + a_4 - cB(8B - 2A^2) = 0, \end{cases}$$

oder, wenn man

11)
$$c(8B - 2A^2) = \mu$$

setzt und die entsprechenden Glieder zusammenzieht,

11)
$$\begin{cases} a_1 B - a_1 A + (a_2 - \mu) = 0 \\ a_1 B - (a_2 + \frac{1}{2}\mu)A + a_3 = 0 \\ (a_2 - \mu)B - a_3 A + a_4 = 0. \end{cases}$$

Eliminirt man hieraus B und A, so ergibt sich die kubische Gleichung

12)
$$\begin{vmatrix} a_0; & a_1; & a_2 - \mu \\ a_1; & a_2 + \frac{\mu}{2}; & a_3 \\ a_2 - \mu; & a_3; & a_4 \end{vmatrix} = 0.$$

[Vergl. Beispiel 17 in § 69.]

Sind die Wurzeln dieser Gleichung μ_0, μ_1, μ_2 und setzt man μ_0 in zwei der Gleichungen 10) ein, so ergeben sich daraus die Grössen B und A.

Diese Grössen A und B setzt man in 5) ein und findet durch Auflösung der quadratischen Gleichung zwei Wurzeln,

die mit λ_0 und λ_1 identisch sind. Mit Hülfe derselben kann man aus drei Gleichungen des Systems 3) die Werthe von b_0, b_1 und c feststellen, so dass also die Form 2) bestimmt ist.

Ebenso kann man mit μ_1 und μ_2 verfahren, womit drei verschiedene Auflösungen gefunden sind. Es können also auch drei Systeme von Werthen angegeben werden, wodurch die binäre biquadratische Form auf die kanonische reducirt wird.

§ 149.

Aufgaben.

1) Bringe

$$a_0 x_1^3 + 3a_1 x_1^2 x_2 + 3a_2 a_1 x_2^2 + a_3 x_2^3$$

auf die kanonische Form

$$b_0 u_1^3 + a_1 u_2^3,$$

wo

$$u_1 = x_1 + \lambda_0 x_2, \quad u_2 = x_1 + \lambda_1 x_2$$

ist.

2) Bringe ebenso

$$a_0 x_1^5 + 5a_1 x_1^4 x_2 + 10 a_2 x_1^3 x_2^2 + 10 a_3 x_1^2 x_2^3 + 5a_4 x_1 x_2^4 + a_5 x_2^5$$

auf die kanonische Form

$$b_0 u_1^5 + b_1 u_2^5 + b_3 x_3^5.$$

3) Welche Bedingung müssen die Coefficienten der Form

$$a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2$$

erfüllen, damit sie in ein vollständiges Quadrat übergeführt werden kann?

4) Unter welcher Bedingung lässt sich die Form

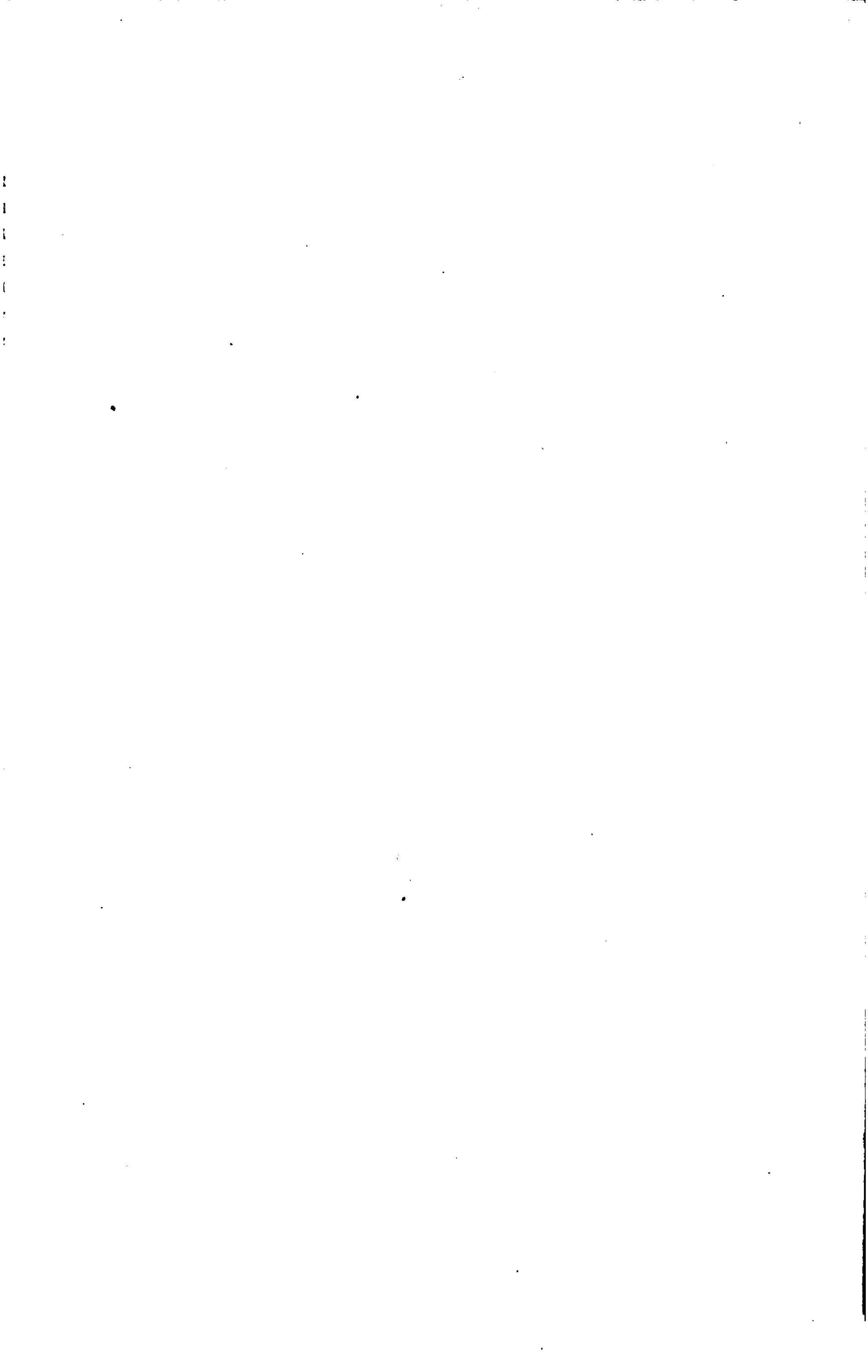
$$a_0 x_1^4 + 4a_1 x_1^3 x_2^2 + 6a_2 x_1^2 x_2^2 + 4a_3 x_1 x_2^3 + a_4 x_2^4$$

auf ein Aggregat aus zwei Potenzen vom Grade 4 reduciren?

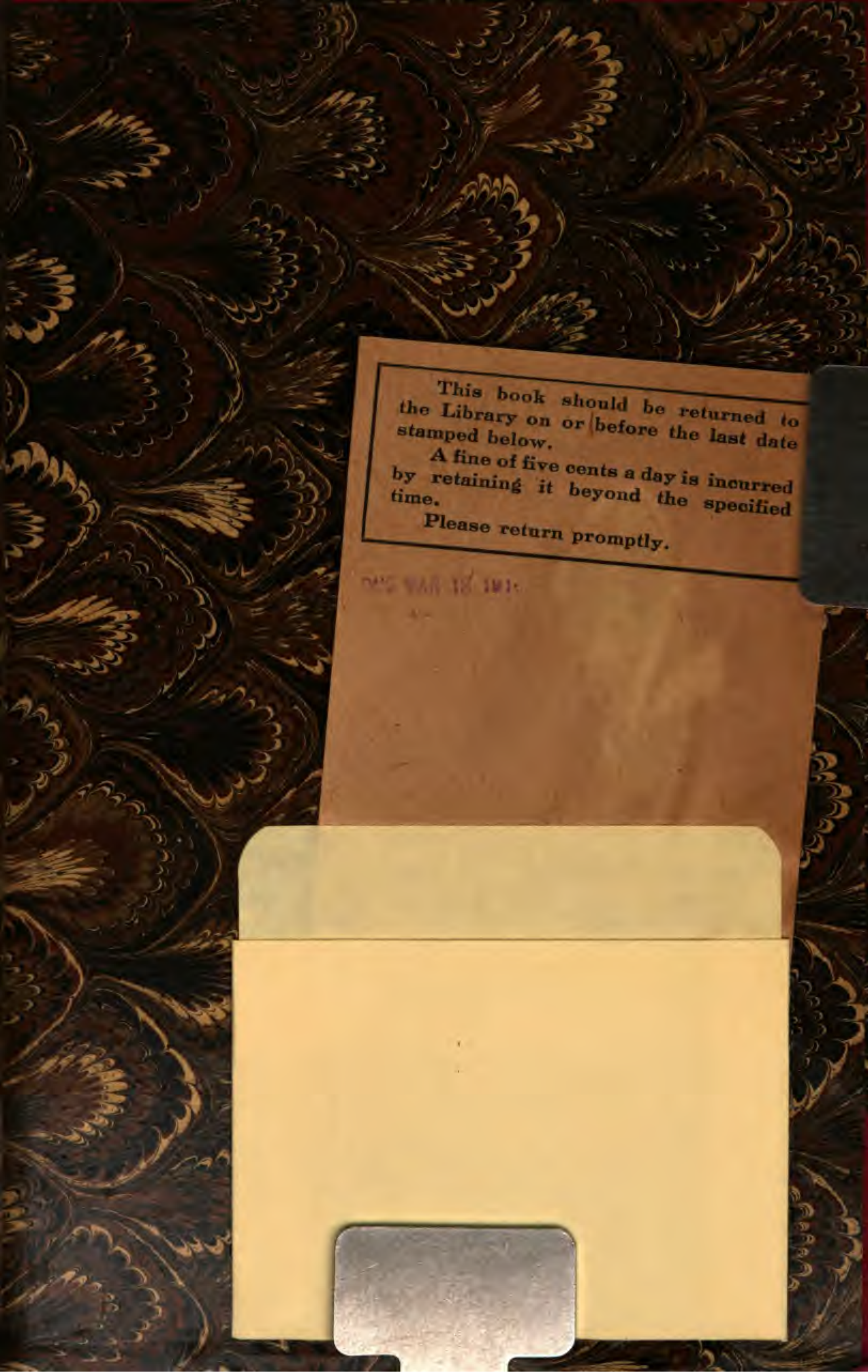
5) Führe unter der Annahme

$$\begin{vmatrix} a & a_1 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 0$$

die Reduktion der binären quadratischen und biquadratischen Formen aus.







This book should be returned to the Library on or before the last date stamped below.
A fine of five cents a day is incurred by retaining it beyond the specified time.
Please return promptly.